УДК 336.767

В.Ю. Хохлов, канд. техн. наук,
Консультант з корпоративних фінансів
та інвестиційного менеджменту

АЛГОРИТМ ОПТИМІЗАЦІЇ ПОРТФЕЛЮ ЗА НОРМОЮ ШАРПА

АНОТАЦІЯ. Оптимальний портфель з найвищою можливою нормою Шарпа відіграє важливу роль у розподілі капіталу та оцінці результатів управління інвестиціями. У статті запропоновано простий алгоритм визначення такого портфеля для будь-якої множини активів без використання нелінійного програмування. Алгоритм було перевірено на індексі S&P 100 у 2010 році. Також розглянуто проблему використання арифметичних середніх чи фактичних повних дохідностей у якості вхідних даних.

ABSTRACT. An optimal portfolio with the highest possible Sharpe ratio plays an important role for the capital allocation and performance evaluation. This paper introduces a simple algorithm for finding the Sharpe-optimal portfolio without solving a non-linear problem. The results are tested on S&P 100 components in year 2010. They also address the issue of using arithmetic means or actual returns as the optimization inputs.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. Портфель цінних паперів, оптимальний портфель, норма Шарпа, розподіл капіталу, математична модель.

Задача asset allocation, тобто визначення ваги активів у портфелі, є ключовою задачею портфельних менеджерів. Як вказано у [1], понад 90 % вартості, яку створюють портфельні менеджери, створюється саме за рахунок asset allocation. Ця стаття присвячена дослідженню проблеми визначення ваги активів у портфелі та оптимізації портфелю за нормою Шарпа.

Сучасна портфельна теорія, починаючи з фундаментальної роботи Марковиця [2], забезпечує теоретичну базу для mean-variance оптимізації (MVO). Розв'язок цієї задачі без накладання обмежень був отриманий Мертоном [3], але на практиці він часто призводить до нездійсненого розподілу капіталу завдяки великим довгим та коротким позиціям. Якщо ж додати обмеження на вагу активів, то MVO стає задачею квадратичного програмування, один з найвідоміших алгоритмів її розв'язання запропонував Шарп [4]. Цей алгоритм дозволяє знаходити вагові коефіцієнти (вагу) активів в оптимальному портфелі для заданої схильності інвестора до ризику (risk tolerance). Такий підхід дуже пасує індивідуальним інвесторам, для яких визначення схильності до ризику є дуже розповсюдженим у практиці фінансових радників, але він не працює для інвестиційних фондів чи портфелів, для яких не визначений конкретний суб’єкт, в інтересах якого здійснюється управління.

На практиці, для оцінки успішності портфельних менеджерів, інвестиційних фондів та окремих портфелів, використовуються низка показників [5], найпопулярнішим з яких є норма Шарпа, що дорівнює відношенню інвестиційної доходності понад безризикову ставку відсотка до стандартного відхилення доходності. Норма Шарпа часто є критерієм вибору фонду, портфеля чи менеджера, тому її максимізація є природною задачею при визначенні ваги активів. Хоча оригінальний алгоритм Шарпа не дозволяє вирішити задачу визначення ваги активів у портфелі, оптимальному за нормою Шарпа, у даній статті запропонована його модифікація, яка дасть таку можливість.

Ще одне застосування оптимального за нормою Шарпа портфеля полягає в тому, що він визначає оптимальний розподіл капіталу за наявності безризикового активу. Як доведено у сучасній портфельній теорії, всі портфелі, що відповідають такому розподілу, лежать вздовж прямої лінії, що називається capital allocation line (CAL). Ця лінія є дотичною до ефективної границі Марковиця саме у точці, яка відповідає портфелю, оптимальному за нормою Шарпа. Хоча вважається, що для ринкового портфелю цю точку можна визначити за допомогою зваженого по капіталізації ринкового індексу, це дасть змогу побудувати лише capital market line (CML), але на практиці частіше виникає потреба побудувати CAL для визначеної множини активів, а не всього ринку акцій. До того ж, багато інвесторів мають обмеження щодо коротких позицій у портфелі, для врахування цього обмеження стандартна CAL непридатна. У статті запропоновано консервативну CAL, яка містить оптимальні портфелі без коротких позицій, та показано алгоритм її побудови.

Метою цього дослідження є створення методологічної бази для оптимізації портфелю за нормою Шарпа. Завдання дослідження — розробка алгоритму оптимізації, який дозволяє знаходити вагу активів у портфелі з найбільшою нормою Шарпа за умови існування обмежень на вагу активів.

Алгоритм Шарпа

Алгоритм, розроблений Уільямом Шарпом, дозволяє розв’язувати задачу квадратичного програмування та знаходити ваги активів, які максимізують таку функцію корисності:

$$U = r_p - \frac{1}{r_t}\sigma_p^2 = \sum_i w_i r_i - \frac{1}{r_t}\sum_{i,j} w_i w_j \sigma_{ij} \to \max, \tag{1}$$

де r_p позначає очікувану дохідність портфелю, r_t — схильність інвестора до ризику, σ_p — стандартне відхилення дохідності портфелю, w_i — вага *i*-го активу у портфелі, r_i — очікувана дохідність *i*-го активу, σ_{ij} — коваріація дохідностей *i*-го та *j*-го активів (при цьому $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ позначає варіацію *i*-го активу), та задовольняють таким обмеженням:

$$\sum_i w_i = 1, \tag{2}$$

$$w_i^{\min} \le w_i \le w_i^{\max}, \; i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Алгоритм Шарпа використовує градієнтний метод розв'язання задачі квадратичного програмування та досить швидко збігається до локально оптимального рішення. Градієнтний метод застосовує поняття маржинальної корисності, яка є частковою похідною функції корисності за вагою індивідуального активу:

$$MU_i = \frac{\partial U}{\partial w_i} = \frac{\partial r_p}{\partial w_i} - \frac{1}{r_t}\frac{\partial\left(\sigma_p^2\right)}{\partial w_i} = r_i - \frac{2}{r_t}\sum_j w_j \sigma_{ij}. \tag{4}$$

Задача оптимізації за нормою Шарпа

Щоб максимізувати норму Шарпа, потрібно розв'язати оптимізаційну задачу з такою цільовою функцією:

$$R_s = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p} = \left(r_p - r_f\right)\sigma_p^{-1} = \left(\sum_i w_i r_i - r_f\right) \times \left(\sum_{i.j} w_i w_j \sigma_{ij}\right)^{-0,5}, \tag{5}$$

де r_f позначає безризикову ставку відсотка.

Це задача нелінійного програмування, а такі задачі не мають тривіального шляху розв'язання. Алгоритми нелінійного програмування набагато складніші за алгоритм Шарпа. Але ми можемо використати той факт, що будь-який розв'язок нелінійної задачі (5) має бути коренем для усіх її часткових похідних. Часткова похідна функції (5) по вазі *i*-го активу дорівнює

$$\frac{\partial R_S}{\partial w_i} = \frac{1}{\sigma_p}\frac{\partial r_p}{\partial w_i} + \left(r_p - r_f\right)\frac{\partial}{\partial w_i}\left(\sigma_p^2\right)^{-0,5} = \frac{1}{\sigma_p}\frac{\partial r_p}{\partial w_i} - \frac{0,5\left(r_p - r_f\right)}{\left(\sigma_p^2\right)^{1,5}}\frac{\partial\left(\sigma_p^2\right)}{\partial w_i} =$$

$$= \frac{r_i}{\sigma_p} - \frac{r_p - r_f}{\sigma_p^3}\sum_j w_j \sigma_{ij} = \frac{1}{\sigma_p}\left(r_i - \frac{r_p - r_f}{\sigma_p^2}\sum_j w_j \sigma_{ij}\right). \tag{6}$$

Можна побачити, що всі корені (6) є також і коренями (4), якщо виконується таке рівняння для значення схильності інвестора до ризику:

$$r_t^* = \frac{2\sigma_p^2}{r_p - r_f}. \qquad (7)$$

Таким чином, оптимальний за нормою Шарпу портфель буде розв'язком задачі (1) — (3), який задовольняє також рівнянню (7). Оскільки в алгоритмі Шарпа схильність інвестора до ризику є вхідним параметром, який може мати будь-яке значення, то змінюючи його можна отримати портфель, у якого схильність до ризику задовольняє рівнянню (7), тобто визначити оптимальний за нормою Шарпу портфель, без розв'язку нелінійної задачі.

Модифікація алгоритму Шарпа

Запропонована модифікація алгоритму Шарпа полягає у його використанні для знаходження розв'язку задачі (1) — (3), що задовольняє рівнянню (7). Хоча заздалегідь неможливо вказати на таке значення параметру схильності до ризику r_t^*, тобто пряме використання алгоритму з будь-якою наперед заданою схильністю до ризику неможливе для розв'язку цієї проблеми, ми можемо використати ітеративну сутність алгоритму. Оскільки він збігається до оптимального рішення при будь-якому значенні r_t, ми можемо замість константи зробити цей параметр змінним та на кожній ітерації знаходити його конкретне значення, яке задовольняло би рівнянню (7) на попередній ітерації. Збіжність алгоритму буде гарантувати, що різниця між кінцевими ітераціями є мінімальною, тому рівняння (7) буде приблизно (з точністю до порогу алгоритму) виконуватись й на останній ітерації.

Модифікований алгоритм має такі вхідні параметри:

- $w^{(0)} = \{w_i^{(0)}\}$, $i = \overline{1,n}$ — початковий розв'язок, що задовольняє умовам (2) — (3),
- $r = \{r_i\}$ — вектор очікуваних дохідностей,
- $\sum = \{\sigma_{ij}\}$ — коваріаційна матриця,
- r_f — безризикова ставка відсотка,
- $\{w_i^{\min}\}$, $\{w_i^{\max}\}$, $i = \overline{1,n}$ — нижня та верхня границя ваги окремих активів у (3).

Алгоритм має кінцеву кількість ітерацій $k = 0,1,2,\ldots$, кожна з яких складається з наступних кроків (слід зазначити, що кроки 2—5 та 7 такі ж самі, як в оригінальному алгоритмі Шарпа):

1. Змінний параметр схильності до ризику розраховується згідно з формулою (7):

$$r_t^{(k)} = 2\frac{\sigma_p^2}{r_p - r_f} = 2\frac{\sum_{i,j} w_i^{(k)} w_j^{(k)} \sigma_{ij}}{\sum_i w_i^{(k)} r_i - r_f}.$$

2. Маржинальні корисності розраховуються по формулі (4), де $r_t = r_t^{(k)}$.

3. Обираються два активи, ваги яких змінюються. При цьому збільшується вага активу з найбільшою маржинальною корисністю, вагу якого ми можемо збільшити у портфелі, та зменшується вага активу з найменшою маржинальною корисністю, вагу якого ми можемо зменшити у портфелі. Якщо один з цих активів неможливо визначити, то алгоритм припиняється:

$$i_{\text{add}} : MU_{i_{\text{add}}} = \max_i \left\{ MU_i \middle| w_i^{(k)} < w_i^{\max} \right\}$$

$$i_{\text{sub}} : MU_{i_{\text{sub}}} = \min_i \left\{ MU_i \middle| w_i^{(k)} > w_i^{\min} \right\}$$

4. Розраховується ефект від зміни ваг активів:

$$\Delta MU = MU_{i_{\text{add}}} - MU_{i_{\text{sub}}}.$$

5. Якщо величина ефекту менша за поріг оптимізації, алгоритм припиняється.

6. Розраховується оптимальний можливий розмір зміни ваги двох активів:

$$\Delta w = \min \left\{ \frac{MU_{i_{\text{add}}} - MU_{i_{\text{sub}}}}{2\left| r_t^{(k)} \left(\sigma_{i_{\text{add}}}^2 + \sigma_{i_{\text{sub}}}^2 - \sigma_{i_{\text{add}} i_{\text{sub}}} \right) \right|}, w_{i_{\text{add}}}^{\max} - w_{i_{\text{add}}}^{(k)}, w_{i_{\text{sub}}}^{(k)} - w_{i_{\text{sub}}}^{\min} \right\}.$$

7. Розраховуються нові ваги активів у портфелі, після чого переходимо на наступну ітерацію:

$$w_i^{(k+1)} = \begin{cases} w_i^{(k)} + \Delta w, i = i_{\text{add}}, \\ w_i^{(k)} - \Delta w, i = i_{\text{sub}}, \\ w_i^{(k)}, \textit{у іншому випадку.} \end{cases}.$$

Запропонований алгоритм дуже простий у реалізації та відрізняється від алгоритму Шарпа лише додатковим розрахунком величини r_t на кроці 1 та використанням модулю у знаменнику в формулі на кроці 6.

Щоб перевірити роботу модифікованого алгоритму, використаємо класичну задачу оптимізації портфелю з трьох активів, яку використовував Уільям Шарп. Ці активи — інструменти грошового ринку (гроші), облігації та акції — мають інвестиційні параметри, що зазначені у табл. 1.

Таблиця 1

ВХІДНІ ДАНІ ДЛЯ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ПОРТФЕЛЯ З ТРЬОХ АКТИВІВ

Активи	Границі ваги активів		Початковий розв'язок	Очікувана дохідність	Стандартне відхилення	Кореляції		
i	$w_i^{\min}$	$w_i^{\max}$	$w_i^{(0)}$	r_i	σ_i	1	2	3
1: гроші	0	1	1	2,8	1,0	1,00	0,40	0,15
2: облігації	0	1	0	6,3	7,4	0,40	1,00	0,35
3: акції	0	1	0	10,8	15,4	0,15	0,35	1,00

Безризикова ставка відсотку є рівною очікуваній доходності грошей, тобто 2,8 %. Модифікований алгоритм Шарпа знаходить оптимальний за нормою Шарпа портфель з очікуваною дохідністю 7,96 % та стандартним відхиленням 8,52 Цей портфель відповідає схильності інвестора до ризику 28,157. Ми можемо за допомогою оригінального алгоритму Шарпа побудувати низьку оптимальних портфелів з різними, в т.ч. близькими значеннями схильності до ризику, щоб впевнитися, що знайдений за допомогою модифікованого алгоритму портфель є оптимальним за нормою Шарпа. Ці портфелі та їх параметри наведено у табл. 2.

Як видно з параметрів побудованих оптимальних портфелів, розв'язок, знайдений за допомогою модифікованого алгоритму, має найвище значення норми Шарпа.

Таблиця 2

ОПТИМАЛЬНІ ПОРТФЕЛІ З ТРЬОХ АКТИВІВ

Активи	**Значення показнику схильності інвестора до ризику**								
	0	**10**	**28,147**	**28,157**	**28,167**	**30**	**50**	**75**	**100**
Гроші	100,00 %	65,04 %	0,0000 %	**0,0000 %**	0,0000 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %
Облігації	0,00 %	21,71 %	63,1367 %	**63,1258 %**	63,1155 %	61,17 %	39,96 %	13,45 %	0,00 %
Акції	0,00 %	13,26 %	36,8633 %	**36,8742 %**	36,8845 %	38,83 %	60,04 %	86,55 %	100,00 %
Дохідність	2,80	4,62	7,958848422	**7,959341013**	7,959802944	8,05	9,00	10,20	10,80
Ст. відхилення	1,00	3,27	8,521898631	**8,522712232**	8,523475392	8,67	10,65	13,71	15,40
Норма Шарпа	0,00	0,56	0,605363739	**0,605363747**	0,605363740	0,6051	0,58	0,54	0,52

Оптимальні за нормою Шарпа портфелі на ринку акцій США

Щоб перевірити модифікований алгоритм на реальних даних, використано вибірку щоденних дохідностей для 98 акцій, які входять до індексу Standard & Poor's 100 (S&P 100). Два компоненти індексу, BNI та USB, не були розглянуті, тому що вони не мають повного покриття даних у 2010 році. Безризикова річна ставка відсотка взята на рівні 0,47 % (згідно дохідності річних облігацій Казначейства США на 31 грудня 2009 року). У портфелі не дозволені короткі позиції, тобто ваги індивідуальних акцій повинні мати значення від 0 % до 100 %.

Одне з ключових питань застосування алгоритму на практиці — це питання визначення очікуваної річної доходності. Зазвичай у якості їх незміщеної оцінки обирають вибіркове середнє щоденних дохідностей, яке відповідним чином анналізують. Це доречно, якщо щоденні дохідності є незалежними нормально розподіленими випадковими змінними. У такому випадку, очікувана періодична (у т.ч. річна) дохідність та її варіація розраховуються шляхом арифметичного зв'язування: $r^{\text{annual}} = Tr^{\text{daily}}$ та $\sigma^2_{\text{annual}} = T\sigma^2_{\text{daily}}$. Можна зауважити, що саме у цьому випадку річна дохідність портфелю буде зваженою сумою річних дохідностей його компонентів: $r_p^{\text{annual}} = Tr_p^{\text{daily}} = \sum_i w_i Tr_i^{\text{daily}} = \sum_i w_i r_i^{\text{annual}}$.

Важливим наслідком вищевказаного є те, що при використанні алгоритмів оптимізації портфелю з застосуванням вибірок щоденних дохідностей у якості джерела вхідних даних, неявно закладається нормальний розподіл випадкових змінних, тому що інакше періодична дохідність портфелю не буде співпадати зі зваженою аннуалізованою дохідністю окремих активів. Тим не менше, в алгоритмі закладена така формула:

$$r_p = \sum_i w_i r_i \tag{8}$$

Результати роботи алгоритму з використанням арифметичних середніх та вибіркових коваріацій у якості вхідних даних наведено в табл. 3. Теоретична дохідність портфеля, розрахована по формулі (8), позначена як «модельна дохідність», у той час як фактична дохідність, розрахована шляхом визначення щоденної вартості портфелю, позначена як «фактична дохідність».

Таблиця 3

ОПТИМАЛЬНІ ПОРТФЕЛІ З КОМПОНЕНТ S&P 100 (РОЗРАХУНОК ПО АРИФМЕТИЧНИМ СЕРЕДНІМ)

Акція	Оптимальні портфелі для різної схильності інвестора до ризику											Шарп-оптим.
	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3	0,5	0,75	1	1,5	3	
AAPL, %		0,49	7,48	10,20	11,76	13,27	3,83					8,39
ABT, %	12,24											
BMY, %	4,70	0,93										
CAT, %			2,43	8,41	14,90	27,71	45,92	61,22	64,29	59,18	43,88	4,59
CL, %	9,68											
COST, %	0,02	5,32	1,72									
CPB, %	8,16											
DD, %				6,12	7,14	6,12						2,30
F, %			1,30	3,69	6,11	11,07	20,81	30,74	35,71	40,82	56,12	2,10
GS, %	0,40											
JNJ, %	13,27											
KFT, %	1,55	3,24										
MCD, %	4,08	22,54	17,79	1,73								13,22
MO, %	1,02	29,67	39,94	36,81	23,09							40,51
PG, %	8,16											
SLE, %		14,65	25,90	33,04	37,00	41,84	29,44	8,04				28,89
SO, %	16,33	22,82	3,44									

TGT, %		0,35									
WMT, %	20,39										
Модельні											
Дохідність, %	6,82	27,51	34,07	39,96	43,36	48,86	52,66	56,58	57,92	58,02	58,30	36,48
Ст.відхил. , %	10,04	11,75	13,71	16,14	17,88	21,30	24,57	29,11	30,89	31,08	32,10	14,63
Норма Шарпа, %	0,632	2,301	2,451	2,447	2,399	2,272	2,124	1,928	1,860	1,852	1,802	2,461
Фактичні												
Дохідність, %	6,52	30,75	39,25	47,16	51,80	59,30	64,22	68,72	70,09	70,15	70,08	42,46
Ст.відхил., %	10,04	11,75	13,71	16,14	17,88	21,30	24,57	29,11	30,89	31,08	32,10	14,63
Норма Шарпа, %	0,603	2,577	2,829	2,893	2,871	2,762	2,595	2,345	2,254	2,242	2,169	2,870

Як можна побачити з табл. 3, модифікований алгоритм визначає портфель з найбільшою нормою Шарпа при використанні модельних дохідностей. У цьому випадку побудована CAL є дотичною до ефективної границі Марковиця (рис. 1). Також, варто відзначити, що індекс S&P 100 (позначений OEX) не лежить на ефективній границі.

Рис. 1. Модельна ефективна границя, розрахована по арифметичним середнім

На жаль, якщо ми поглянемо на фактичні дохідності побудованих портфелів, то оптимальний за нормою Шарпа на модельних дохідностях портфель перестає бути оптимальним на фактичних дохідностях. Це пов'язано із тим, що щоденні дохідності не додаються, а зв'язуються геометрично, тобто аннуалізація проводиться зовсім іншим чином: $1 + r_{\text{annual}} = \left(1 + r_{\text{daily}}\right)^T$.

Теоретично, випадкові щоденні дохідності моделюються не нормальним, а лог-нормальним розподілом. У цьому випадку рівняння (8) більше не працює для періодичних дохідностей, тобто якщо ми візьмемо вибірку щоденних дохідностей і зробимо по ній оцінку очікуваних дохідностей за період, то ми не отримаємо коректну оцінку дохідності портфелю за період як зваженої суми цих величин. Фактично, ця зважена сума буде відповідати портфелю лише у тому випадку, коли ми його не ребалансуємо. Більш докладно цю проблему досліджено Бернстейном та Уілкінсоном [6].

Звичайно, й фактичний розподіл капіталу, здійснений по результатам роботи алгоритму Шарпа з використанням арифметичних середніх у якості оцінки очікуваних дохідностей активів за період, не буде відповідати оптимальному розподілу, тобто CAL не буде дотичною до фактичної ефективної границі Марковиця (яка, до речі, є відмінною від модельної ефективної границі Марковиця). Цю невідповідність зображено на рис. 2. Лінія CAL, побудована з використанням фактичної дохідності портфеля, що є результатом роботи модифікованого алгоритму Шарпа, вже не є дотичною до ефективної границі, хоча й досить близька до неї.

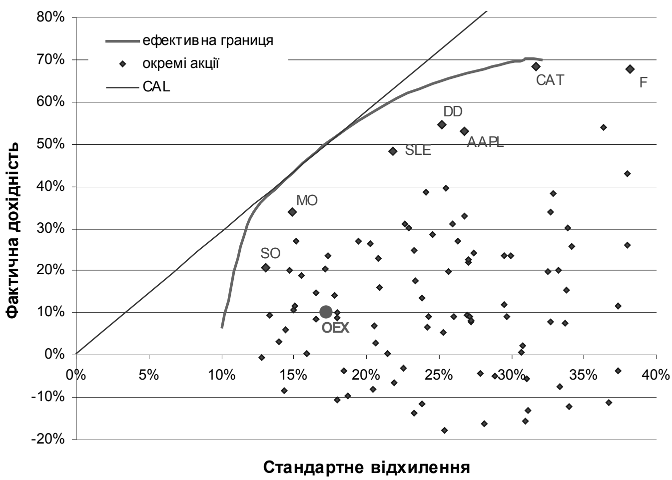

Рис. 2. Фактична ефективна границя,
розрахована по арифметичним середнім

Що ж можна зробити для того, щоб використовувати алгоритми оптимізації періодичної дохідності портфеля? На жаль, сучасна теорія не дає відповіді на це питання. Але на практиці для ex-post моделювання можна використовувати не арифметичні середні, а фактичні періодичні дохідності у якості вхідних параметрів. Це, звісно, не буде працювати для ex-ante розрахунків, але для знаходження ex-post оптимального за нормою Шарпу портфеля цей шлях працює. Хоча з теоретичної точки зору, гарантувати рівність модельних та фактичних дохідностей портфеля можливо лише у випадках, коли працює рівність (8), при використанні фактичних дохідностей активів як вхідних параметрів ми можемо побачити, що розбіжність між модельною та фактичною дохідністю портфеля стає незначною. Результати модифікованого алгоритму Шарпа з використанням фактичної дохідності активів у якості вхідних параметрів наведені у табл. 4.

Таблиця 4

ОПТИМАЛЬНІ ПОРТФЕЛІ З КОМПОНЕНТ S&P 100 (РОЗРАХУНОК ПО ФАКТИЧНИМ ДОХІДНОСТЯМ)

Акція	Оптимальні портфелі для різної схильності інвестора до ризику:											Шарп-оптим.
	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3	0,5	0,75	1	1,5	3	
AAPL, %		2,51	7,97	10,03	11,29	7,77						8,65
ABT, %	12,60											
BMY, %	4,39											
CAT, %			7,46	16,24	25,47	42,27	62,40	76,84	77,71	79,44	84,64	9,32
CL, %	9,32											
COST, %		4,19										
CPB, %	8,37											
DD, %			3,45	7,08	7,69							5,13
F, %			0,98	3,28	5,57	10,67	18,03	23,16	22,29	20,56	15,36	1,48
GS, %	0,31											
JNJ, %	13,27											
KFT, %	1,55	0,63										
MCD, %	4,42	21,89	9,75									4,72
MO, %	0,28	33,44	40,04	26,75	8,57							38,51
PG, %	8,56											
SLE, %		17,92	30,35	36,62	41,40	39,29	19,57					32,19
SO, %	17,00	19,42										
WMT, %	19,94											

Модельні											
Дохідність, %	6,37	32,37	42,76	49,29	54,32	59,31	64,46	68,40	68,40	68,41	68,45	44,66
Ст.відхил., %	10,04	12,14	15,02	17,47	19,82	22,62	26,74	30,75	30,76	30,78	30,90	15,67
Норма Шарпа, %	0,588	2,628	2,816	2,795	2,717	2,601	2,393	2,209	2,208	2,207	2,200	2,820
Фактичні												
Дохідність, %	6,47	32,87	43,70	50,73	56,17	61,47	66,44	69,77	69,74	69,67	69,45	45,73
Ст.відхил., %	10,04	12,14	15,02	17,47	19,82	22,62	26,74	30,75	30,76	30,78	30,90	15,67
Норма Шарпа, %	0,598	2,669	2,878	2,877	2,810	2,697	2,467	2,254	2,252	2,248	2,232	2,888

Як можна побачити на рис. 3, лінія CAL, яка побудована по фактичній дохідності портфеля, який було розраховано за допомогою модифікованого алгоритму Шарпа, є дотичною до фактичної ефективної границі Марковиця. Сама ж фактична ефективна границя є майже такою, як і фактична границя, якщо її побудувати з використанням в алгоритмі арифметичних середніх (пунктирна лінія на рисунку).

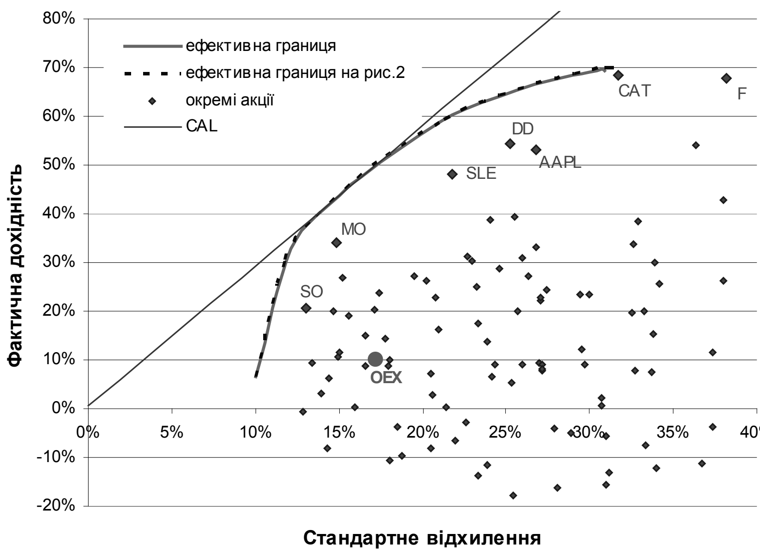

Рис. 3. Фактична ефективна границя, розрахована по фактичним дохідностям

Консервативна лінія розподілу капіталу

За наявності безризикового активу, ефективна границя Марковиця вже не вказує на найкращі можливості по формуванню портфелю — інвестор може зробити ще кращий розподіл, комбінуючи ризикові активи із безризиковим. Усі оптимальні портфелі у цьому випадку будуть мати ту ж саму норму Шарпа, тобто вони будуть лежати на одній лінії, лінії розподілу капіталу (CAL), яка має таке рівняння:

$$r_p(\sigma_p) = r_f + \frac{r_p^* - r_f}{\sigma_p^*}\sigma_p, \qquad (9)$$

де r_p^*, σ_p^* позначають очікувану дохідність та стандартне відхилення оптимального за нормою Шарпа портфелю.

Сучасна портфельна теорія доводить, що ринковий портфель є оптимальним за нормою Шарпа. Багато дослідників вважало, що ринкові індекси є досить добрим наближенням до ринкового портфелю. Але як ми побачили при дослідженні індексу S&P 100, він є далеко не оптимальним портфелем. Тому для побудови CAL доречно використовувати не ринковий індекс, а оптимальний по нормі Шарпу портфель, який можна розрахувати за допомогою запропонованого у цій статті алгоритму.

Типова CAL показана на рис. 4, вона має два сегменти. Сегмент FS містить портфелі, що складаються з довгої позиції як по ризиковим активам, так і по безризиковом (у точці F це 100 % довга позиція по безризиковому активу, у точці S — це 100 % довга позиція до ризиковим активам, що складає оптимальний за нормою Шарпа портфель). Сегмент SN, з іншого боку, відповідає довгій позиції по ризиковим активам та короткій позиції по безризиковому. Але такий розподіл капіталу часто є неможливим або небажаним для консервативних інвесторів, що не бажають брати ризик короткої позиції. Саме тому в даній статті запропонована концепція консервативної CAL.

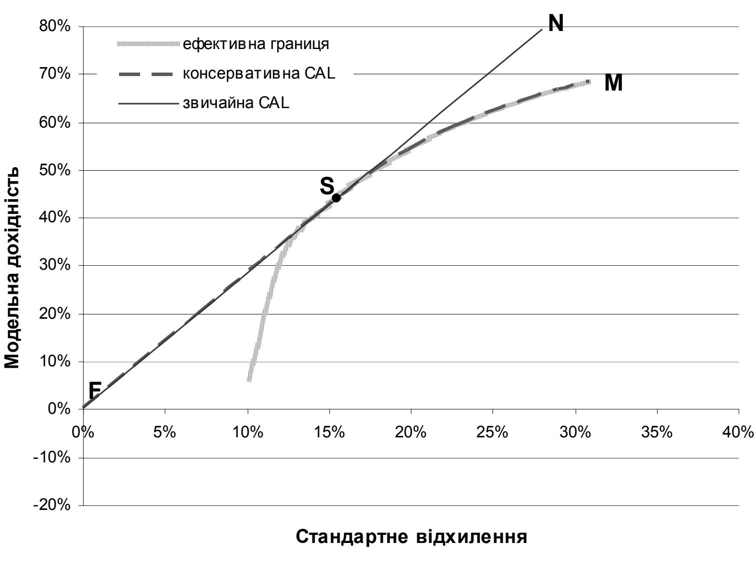

Рис. 4. Консервативна лінія розподілу капіталу

Консервативна лінія розподілу капіталу (консервативна CAL) є кривою у просторі «варіація—дохідність», яка містить усі оптимальні за цими вимірами портфелі, які можна скласти з довгих позицій по ризиковим та безризиковом активам. Консервативна CAL має два сегменти (див. рис. 4) — лінійний сегмент FS, він є таким самим, що й у звичайній CAL, та сегмент ефективної границі SM, який починається з оптимального за нормою Шарпа портфелю та закінчується 100 % довгою позицією за активом, що має найбільшу очікувану дохідність.

Портфельні менеджери, які бажають отримати найкращій розподіл капіталу за умови наявності безризикового активу та заборони коротких позицій, мають інвестувати у портфелі на консервативній CAL. Здійснити такий розподіл просто — для цього спочатку потрібно розрахувати параметри оптимального за нормою Шарпу портфелю (r_p^*, σ_p^*) та розрахувати відповідне значення схильності інвестора до ризику за формулою (7). Якщо схильність конкретного інвестора до ризику є меншою за це значення, потрібно робити розподіл капіталу між безризиковим активом та портфелем, оптимальним за нормою Шарпу, це можна зробити з використанням формули (9). Якщо ж схильність конкретного інвестора до ризику є більшою, то його оптимальний розподіл капіталу лежить на ефективній границі, його можна визначити за допомогою стандартного алгоритму Шарпа.

Нарешті, оригінальний алгоритм Шарпа також працюватиме при додаванні до множини активів безризикового активу. Щоб це зробити, потрібно оцінити очікувану безризикову ставку відостка та покласти усі елементи коваріаційної матриці, що відповідають безризиковому активу, рівними нулю. До речі, консервативна CAL на рис. 4 була побудована саме таким чином.

Висновки

У статті розроблено алгоритм пошуку ваги активів у портфелі, який є оптимальним за нормою Шарпа. Перевагою цього алгоритму над відомим аналітичним розв'язком є те, що він дозволяє накладати обмеження на вагу активів, що на практиці є майже обов'язковою умовою в управлінні портфелем. Запропонований алгоритм алгоритмом квадратичного програмування, його розроблено шляхом модифікації оригінального алгоритму Шарпа [4]. Він забезпечує швидку збіжність до оптимального розв'язку та є простим у реалізації.

Розроблений алгоритм дозволяє також досліджувати оптимальну границю Марковиця, побудовану за історичними даними. Дослідження використання алгоритму з арифметичними середніми та фактичними періодичними дохідностями показує, що саме останній варіант призводить до більш адекватного моделювання фактичної ефективної границі.

У статті запропоновано концепцію консервативного розподілу капіталу при наявності безризикового активу (консервативна CAL), відмінністю якої від звичайної CAL є відсутність короткої позиції за таким активом. Якщо у алгоритмі Шарпа добавити безризиковий актив до множини цінних паперів та покласти у коваріаційній матриці усі відповідні йому елементи рівними нулю, то він дозволяє будувати саме консервативну CAL.

Література

1. *Sharpe W.F., Chen P., Pinto J.E., McLeavey D.W.* Asset Allocation // CFA Curriculum, Level 3, Volume 3. — CFA Institute, 2010. — P. 225—349.
2. *Markowitz H.* Portfolio Selection // *The Journal of Finance.* — 1952. — Vol. 7. — No. 1. — P. 77—91.
3. *Merton R.* An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier // Journal of Financial and Quantitative Analysis. — 1972. — Vol. 7. — No. 4. — P. 1851—1872.
4. *Sharpe W.F.* An Algorithm for Portfolio Improvement // Advances in Mathematical Programming and Financial Planning / K.D.Lawrence, J.B. Guerard, Jr., and Gary D. Reeves (editors). — JAI Press, Inc., 1987. — P. 155—170.
5. *Bodie Z., Kane A., Marcus A.J.* Investments. — McGraw–Hill/Irwin, 2001. — 1015 p.
6. *Bernstein W.J., Wilkinson D.J.* Diversification, Rebalancing, and the Geometric Mean Frontier. [Електронний документ]. (http://ssrn.com/abstract=53503).

Стаття надійшла до редакції 23.09.2011 р.

УДК 331.17:336.713(477)

О.Ю. Козак, аспірант кафедри
інформаційного менеджменту,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ФІНАНСОВОГО ПЛАНУВАННЯ У КОМЕРЦІЙНОМУ БАНКУ

АНОТАЦІЯ. У статті викладено методологію та розроблено модель оптимізації фінансового планування у комерційному банку на основі його динамічного балансу.

ANNOTATION. The article contains methodology and designed model of optimization of financial planning in the commercial bank based on its dynamic balance.