УДК 519.872.2

В. І. Жлуктенко, канд. техн. наук, доц.,
Л. Г. Тарасова, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
С. С. Савіна, канд. екон. наук., доц.,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ПОЕТАПНИМ ОБСЛУГОВУВАННЯМ ВИМОГ. СТОХАСТИЧНІ МОДЕЛІ В ДИНАМІЦІ ТА В СТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМАХ

АНОТАЦІЯ. Запропоновано концепцію дослідження систем масового обслуговування з поетапним обслуговуванням вимог. Побудовано стохастичні моделі систем масового обслуговування з поетапним обслуговуванням вимог для стаціонарного і динамічного режимів в загальному випадку.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: стохастична модель СМО із поетапним обслуговуванням вимог, стохастична модель для стаціонарного режиму, стохастична модель для динамічного режиму.

АННОТАЦИЯ. В работе предложена концепция исследования систем массового обслуживания с поэтапным обслуживанием требований. Построены стохастические модели систем массового обслуживания с поэтапным обслуживанием требований для стационарного и динамического режимов в общем случае.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: стохастическая модель СМО с поэтапным обслуживанием требований, стохастическая модель для стационарного режима, стохастическая модель для динамического режима.

ANNOTATION. The paper presents the concept of the study of queuing systems with a phased maintenance requirements. We construct stochastic models of queuing systems with a phased maintenance requirements for stationary and dynamic regimes in general.

KEY WORDS: queuing systems with a phased maintenance requirements, queuing systems with a phased maintenance requirements for stationary and dynamic regimes in general.

Постановка проблеми. На сучасному етапі одним з найважливіших класів систем керування є системи організаційного керування, до числа яких належать окремі підприємства, фірми, концерни, галузі економіки, економіка держави в цілому, а також глобальні системи, що об’єднують економіку різних держав. Розробка та практичне впровадженням методів найефективнішого керування організаційними системами є головною проблемою у процесі формування та засвоєнні компетенції сучасного економіста.

У зв'язку зі складністю і непередбаченістю навколишнього світу, який представляє собою постійні зміни та розвиток, стохастичні процеси та моделі, як методологія та інструментарій, посідають особливе місце при дослідженні соціально-економічних систем, забезпечуючи найефективніше керування організаційними системами, до яких належать і економіка держави в цілому.

При досліджені систем масового обслуговування поетапне (пофазове) обслуговування вимог каналами на практиці зустрічається в різних сферах людської діяльності: промисловості, сільському господарстві, у сферах обслуговування.

Так, наприклад, у промисловості при виготовленні станком-автоматом деталі над нею здійснюється послідовно повний обсяг етапів обробки; вантажні судна, які надходять до порту, підлягають поетапній обробці в сенсі вигрузки-загрузки вантажів. У сільському господарстві: ми маємо поетапну обробку ниви, засіяної певною культурою. І, надалі, обробка сільськогосподарської сировини (це може бути насіння соняшника, зерно і т. ін.) проходить поетапну обробку, щоб отримати в кінці останнього етапу обслуговування певний продукт, який ми вживаємо. Це можуть бути хлібні вироби, олія, виноградні напої, соки.

У сфері обслуговування: робота білетних кас для забезпечення проїзними квитками пасажирів на залізницях, у аеропортах, у морських і річкових портах, а також обслуговування клієнтів у перукарнях, кафе, ресторанах, банківській сфері при одержанні депозитів вкладниками, в роботі банкоматів і т. ін.

Аналіз останніх джерел чи публікацій. При аналізі основних джерел і публікацій по системам масового обслуговування потрібно виділити роботи таких вчених, як Кофман А., Крюон Р., Коган Я.А., Литвин В.Г. Більшість авторів (Клейнрок Л.І., Коваленко И.Н., Лебедев Е.А., Самочернова Л.И. та ін.), вивчали системи масового обслуговування з одноетапним обслуговуванням, припускаючи, що параметри СМО не змінюються з часом, тобто обмежуючись стаціонарними моделями функціонування. Враховуючи потреби практики, а саме поетапне (пофазове) обслуговування вимог каналами, яке зустрічається в різних сферах людської діяльності, і для більш повного і ефективного дослідження СМО потрібно вивчати стохастичні моделі систем масового обслуговування з поетапним обслуговуванням вимог для стаціонарного і динамічного режимів.

Постановка завдання. Розглянемо побудову стохастичних моделей систем масового обслуговування із поетапним обслуговуванням вимог для стаціонарного і динамічного режимів у загальному випадку.

Для побудови стохастичних моделей такого класу задач дотримуються таких припущень: вимоги, які надходять до системи, утворюють пуассонівський потік із параметром λ. Кожна вимога, коли підійшла черга на її обслуговування, повинна пройти m етапів обробки. При цьому вважаємо, що час, який витрачається на обслуговування на кожному етапі є випадковою величиною, яка має експоненціальний закон розподілу ймовірностей із параметром $\mu_{i,\ i+1}$, який означає, що після закінчення i-го етапу вимога переходить до $(i+1)$-го етапу обслуговування.

Параметр $\mu_{m,0}$ інформує про те, що після закінчення m-го (останнього) етапу, вимога залишає систему.

Для побудови відповідних математичних моделей введемо наступні поняття та означення:

$P_{0\ (0,\ 0,\ \ldots,\ 0)}(t)$ — імовірність того, що в момент часу t у системі вимоги відсутні;

$P_{k(1,0,0,\ldots,0)}(t);\ P_{k(0,1,0,\ldots,0)}(t), \ldots, P_{k(0,0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}(t),\ \ P_{k(1,0,0,\ldots,0,1)}(t)$ — імовірності того, що в момент часу t у системі знаходиться k вимог і одна із вимог перебуває, відповідно, на першому, другому, i-му та останньому, m-ому етапах обслуговування.

У системі може знаходитися лише обмежене число вимог, тобто число вимог у черзі не повинно перевищувати певного числа, яке позначимо через k_1.

А тому:

$P_{k_1(1,0,0,\ldots,0)}(t);\ P_{k_1(1,1,0,\ldots,0)}(t), \ldots,\ P_{k_1(1,0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}(t),\ P_{k_1(0,0,0,\ldots,0,1)}(t)$ — імовірності того, що в черзі знаходиться k_1 вимог і одна вимога перебуває, відповідно, на першому, другому і, на кінець, останньому етапах обслуговування.

Виклад основного матеріалу дослідження. Стохастична модель систем масового обслуговування із поетапним обслуговуванням вимог для динамічного стану в загальному випадку буде мати наступний вигляд:

$$P'_{0(0,0,0,\ldots,0)}(t) = -\lambda P_{0(0,0,0,\ldots,0)}(t) + \mu_{m0} P_{0(0,0,0,\ldots,0),1}(t),$$
$$P'_{0(1,0,0,\ldots,0)}(t) = -(\lambda + \mu_{12}) P_{0(1,0,0,\ldots,0)}(t) + \lambda P_{0(0,0,0,\ldots,0)}(t) + \mu_{m0} P_{1(0,0,0,\ldots,0,1)}(t),$$
$$P'_{0(0,1,0,\ldots,0)}(t) = -(\lambda + \mu_{23}) P_{0(0,1,0,\ldots,0)}(t) + \mu_{12} P_{0(1,0,0,\ldots,0)}(t),$$
$$P'_{0(0,0,1,\ldots,0)}(t) = -(\lambda + \mu_{34}) P_{0(0,0,1,\ldots,0)}(t) + \mu_{23} P_{0(0,1,0,\ldots,0)}(t),$$
$$\vdots$$
$$P'_{0(0,0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}(t) = -(\lambda + \mu_{i,i+1}) P_{0(0,0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}(t) +$$
$$+ \mu_{i-1,i} P_{0(0,0,0,\ldots,1,0,0,\ldots,0)}(t),$$
$$\vdots$$
$$P'_{0\,(0,0,0,\ldots,0,\ldots,1)}(t) = -(\lambda + \mu_{m0}) P_{0(0,0,0,\ldots,0,\ldots,1)}(t) + \tag{1}$$
$$+ \mu_{m-1,m} P_{0(0,0,0,\ldots,0,\ldots,1,0)}(t),$$
$$P'_{1\,(1,0,0,\ldots,0,\ldots,0)}(t) = -(\lambda + \mu_{12}) P_{1(1,0,0,\ldots,0,\ldots,0)}(t) + \mu_{m0} P_{2(0,0,0,\ldots,0,\ldots,1)}(t) +$$
$$+ \lambda P_{0(1,0,0,\ldots,0,\ldots,0)}(t),$$
$$P'_{1\,(0,1,0,\ldots,0,\ldots,0)}(t) = -(\lambda + \mu_{23}) P_{1(0,1,0,\ldots,0,\ldots,0)}(t) + \mu_{12} P_{1(1,0,0,\ldots,0\ldots,0)}(t) +$$
$$+ \lambda P_{0(0,1,0,\ldots,0,\ldots,0)}(t),$$
$$\vdots$$
$$P'_{1\,(0,0,0,\ldots,0,\ldots,1)}(t) = -(\lambda + \mu_{m0}) P_{1(0,0,0,\ldots,0,\ldots,1)}(t) +$$
$$+ \mu_{m-1,m} P_{1(0,0,0,\ldots,0,\ldots,1,0)}(t) + \lambda P_{0(0,0,0,\ldots,0,\ldots,1)}(t),$$
$$\vdots$$
$$P'_{k\,(1,0,0,\ldots,0,\ldots,0)}(t) = -(\lambda + \mu_{12}) P_{k(1,0,0,\ldots,0,\ldots,0)}(t) + \mu_{m0} P_{k+1(0,0,0,\ldots,0,\ldots,1)}(t) +$$
$$+ \lambda P_{k\text{-}1(1,0,0,\ldots,0,\ldots,0)}(t),$$
$$P'_{k\,(0,1,0,\ldots,0,\ldots,0)}(t) = -(\lambda + \mu_{23}) P_{k(0,1,0,\ldots,0,\ldots,0)}(t) + \mu_{12} P_{k(1,0,0,\ldots,0\ldots,0)}(t) +$$
$$+ \lambda P_{k\text{-}1(0,1,0,\ldots,0,\ldots,0)}(t),$$
$$\vdots$$
$$P'_{k\,(0,0,0,\ldots,0,\ldots,1)}(t) = -(\lambda + \mu_{m0}) P_{k(0,0,0,\ldots,0,\ldots,1)}(t) +$$
$$+ \mu_{m-1,m} P_{k(0,0,0,\ldots,0,\ldots,1,0)}(t) + \lambda P_{k\text{-}1(0,0,0,\ldots,0,\ldots,1)}(t),$$
$$\vdots$$
$$P'_{k\text{-}1\,(1,0,0,\ldots,0,\ldots,0)}(t) = -(\lambda + \mu_{12}) P_{k_1-1(1,0,0,\ldots,0,\ldots,0)}(t) + \mu_{m0} P_{k_1(0,0,0,\ldots,0,\ldots,1)}(t) +$$

$$+\lambda P_{k_1\text{-}2(0,\ 0,0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 1)}(t),$$

$$P'_{k_1-1\ (0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 0)}(t)=-(\lambda+\mu_{23})P_{k_1-1(0,\ 1,\ 0,\ \ldots,0,\ \ldots,0)}(t)+$$

$$+\mu_{12}\,P_{k_1-1(1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0\ \ldots,0)}(t)+\lambda P_{k_1-2(0,\ 1,0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 0)}(t),$$

$$\vdots$$

$$P'_{k_1-1\ (0,\ 0,0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,1)}(t)=-(\lambda+\mu_{m0})P_{k_1-1(0,\ 0,0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 1)}(t)+$$

$$+\mu_{m-1,m}P_{k_1\text{-}1(0,\ 0,0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 1,0)}(t)+\lambda P_{k_1\text{-}2(0,\ 1,0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 1)}(t),$$

$$P'_{k_1\ (1,\ 0,0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,0)}(t)=-\mu_{12}\,P_{k_1(1,\ 0,0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 0)}(t)+\lambda P_{k_1-1(1,\ 0,0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 1)}(t),$$

$$P'_{k_1\ (0,\ 1,0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,0)}(t)=-\mu_{23}\,P_{k_1(0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 1)}(t)+\lambda P_{k_1\text{-}1(0,\ 1,0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 1)}(t),$$

$$\vdots$$

$$P'_{k_1\ (0,\ 0,0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,1)}(t)=-\mu_{m0}\,P_{k_1(0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 0)}(t)+\lambda P_{k_1\text{-}1(0,\ 1,0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 1)}(t),$$

Отже, модель (1) представляє собою стохастичну модель системи в динаміці, тобто, ймовірності, які необхідно визначити за моделлю, залежать від часу t.

Систему диференційних рівнянь (1) можна записати в компактній формі, використовуючи векторно-матричну форму:

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt}=H\vec{P}(t)\rightarrow\vec{P'}(t)=H\vec{P}(t) \qquad (2)$$

Тут:

$$\vec{P'}(t)=\frac{d\vec{P}(t)}{dt}=\begin{pmatrix} P'_0(0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 0)(t)\\ P'_0(1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 0)(t)\\ P'_0(0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 0)(t)\\ P'_0(0,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 0)(t)\\ \vdots\\ P'_{k_1}(1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 0)(t)\\ P'_{k_1}(0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 0)(t)\\ \vdots\\ P'_{k_1}(0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 1)(t)\end{pmatrix},\quad \vec{P}(t)=\begin{pmatrix} P_0(0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 0)(t)\\ P_0(1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 0)(t)\\ P_0(0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 0)(t)\\ P_0(0,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 0)(t)\\ \vdots\\ P_{k_1}(1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 0)(t)\\ P_{k_1}(0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 0)(t)\\ \vdots\\ P_{k_1}(0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 1)(t)\end{pmatrix}.$$

$$H=\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & -(\lambda+\mu_{12}) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_{12} & -(\lambda+\mu_{23}) & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(\lambda+\mu_{12}) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -(\lambda+\mu_{12}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & -\mu_{m_0} \end{pmatrix}$$

Стохастична модель систем масового обслуговування із поетапним обслуговуванням вимог для стаціонарного режиму в загальному випадку буде мати наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
&0=-\lambda \mathrm{P}_{0(0,0,0,\dots,0)}+\mu_{m0}P_{0(0,0,0,\dots,1)},\\
&0=-(\lambda+\mu_{12})P_{0(`,0,0,\dots,0)}+\lambda P_{0(0,0,0,\dots,0)}+\mu_{m0}P_{0(0,0,0,\dots,1)},\\
&0=-(\lambda+\mu_{23})P_{0(0,1,0,\dots,0)}+\mu_{m0}P_{0(1,0,0,\dots,0)},\\
&0=-(\lambda+\mu_{34})P_{0(0,0,1,\dots,0)}+\mu_{23}P_{0(0,1,0,\dots,0)},\\
&\vdots\\
&0=-(\lambda+\mu_{i.i+1})P_{0(0,0,0,\dots,0,1,0,\dots0)}+\mu_{i-1,i}P_{0(0,0,0,\dots,1,0,0,\dots,0)},\\
&\vdots\\
&0=-(\lambda+\mu_{m0})P_{0(0,0,0,\dots,0,\dots,0,1)}+\mu_{m-1,m}P_{0(0,0,0,\dots,1,0)},\\
&0=-(\lambda+\mu_{12})P_{1(1,0,0,\dots,0)}+\lambda P_{0(1,0,0,\dots,0)}+\mu_{m0}P_{1(0,0,0,\dots,0,1)},\\
&\vdots\\
&=-(\lambda+\mu_{m0})P_{1(0,1,0,\dots,0,1)}+\lambda P_{0(0,0,0,\dots,1)}+\mu_{m-1,m}P_{1(0,0,0,\dots,1,0)},\\
&\vdots\\
&0=-(\lambda+\mu_{12})P_{\mathrm{k}(1,0,0,\dots,0)}+\lambda P_{\mathrm{k}\text{-}1(0,0,0,\dots,0,1)}+\mu_{m0}P_{\mathrm{k}+1(0,0,0,\dots,0,1)},\\
&\vdots\\
&0=-(\lambda+\mu_{m0})P_{\mathrm{k}(0,1,0,\dots,0,1)}+\lambda P_{\mathrm{k}\text{-}1(0,0,0,\dots,0,1)}+\mu_{m-1,m}P_{\mathrm{k}(0,0,0,\dots,1,0)},\\
&\vdots\\
&0=-(\lambda+\mu_{12})P_{\mathrm{k}_1-1(10,0,0,\dots,0)}+\lambda P_{\mathrm{k}_1-2(1,0,0,\dots,0)}+\mu_{m0}P_{\mathrm{k}_1(0,0,0,\dots,0,1)},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&0 = -\mu_{12} P_{k_1(1,0,0,\ldots,0)} + \lambda P_{k_1-1(1,0,0,\ldots,0)},\\
&0 = -\mu_{23} P_{k_1(0,1,0,\ldots,0)} + \lambda P_{k_1-1(0,1,0,\ldots,0)},\\
&\vdots\\
&0 = -\mu_{m0} P_{k_1(0,0,0,\ldots,0,1)} + \lambda P_{k_1-1(0,0,0,\ldots,1)}.
\end{aligned} \qquad (3)$$

У векторно-матричній формі систему (3) можна записати так:

$$\vec{\mathrm{p}} \cdot H = 0, \qquad (4)$$

де

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} P_{0(0,0,0,\ldots,0)} \\ P_{0(1,0,0,\ldots,0)} \\ P_{0(0,1,0,\ldots,0)} \\ \vdots \\ P_{k(1,0,0,\ldots,0)} \\ P_{k(0,1,0,\ldots,0)} \\ P_{k(0,0,1,\ldots,0)} \\ \vdots \\ P_{k_1(0,0,0,\ldots,1)} \end{pmatrix}.$$

Потрібно зазначити, що матриця H для стаціонарного режиму має таку ж саму структуру, як і для динамічної стохастичної моделі.

Висновки з проведеного дослідження. Розроблений методологічний підхід дає можливість будувати стохастичні моделі систем масового обслуговування с поетапним обслуговуванням вимог для стаціонарного і динамічного режимів у загальному випадку. В результаті ми маємо можливість по моделі знаходити такі важливі характеристики, як імовірність того, що в момент часу t у системі вимоги відсутні; імовірності того, що в момент часу t у системі знаходиться k вимог і одна із вимог перебуває, відповідно, на першому, другому, i-му та останньому, m-ому етапах обслуговування, при цьому в системі число вимог у черзі не повинно перевищувати певного числа k_1.

Література

1. *Жлуктенко В. І., Тарасова Л. Г., Савіна С. С.* Дослідження операцій: навч. посіб. — К.: КНЕУ, 2009. — 479 с.

2. *Жлуктенко В. І., Тарасова Л. Г., Савіна С. С.* Дослідження операцій: навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц. — К.: КНЕУ, 2009. — 472 с.

3. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І., Савіна С. С.* Стохастичні процеси та моделі в економіці, соціології, екології: Навч. посібник. — К. КНЕУ, 2002. — 225 с.

4. *Клейнрон Л.* Теория массового обслуживания.— М., 1970.—305 с.

5. *Кемени Дж.,Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова. — М.: Наука, 1970. —192 с.

6. *Таха Х.* Введение в исследование операцій / У 2-х кн. — М.: Мир, 1985. — 350 с.

7. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теорія случайных процессов и ее инженерное применение. — М.: Наука,1980. — 126 с.

8. *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. — М., 1971. — 205 с.

9. *Івченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н.* Теория массового обслуживания: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 1982. — 256 с.

Статтю подано до редакції 27.03.12 р.

УДК 08.00.11

В. П. Лісовська, канд. фіз.-мат. наук, доцент,
заст. завідувача кафедри вищої математики (ФУПтаМ),
Л. В. Іващенко, аспірант,
ДВНЗ «Київського національного університету
імені Вадима Гетьмана»

ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ ДЛЯ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ТОЧОК ОБСЛУГОВУВАННЯ КОМЕРЦІЙНОГО БАНКУ ГОТІВКОЮ

АНОТАЦІЯ. Розглянуто застосування моделей управління запасами для розрахунку оптимальних величин готівкових коштів і частоти їх поставок для точок обслуговування комерційного банку.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: точка обслуговування, модель управління запасами, організаційні витрати, формула оптимального замовлення, еластичність витрат.

© В. П. Лісовська,
Л. В. Іващенко, 2012