УДК 336:519.86

Ю. В. Коляда, доц.
кафедри економіко-математичних методів КНЕУ

ДО ПИТАННЯ СТІЙКОСТІ ЦІН НА РИНКУ ТОВАРІВ

Приведено результати практичного відшукання важливих характеристик (області стійкості цін при змінюваності однієї складової, часу встановлення ціни, точності перехідного режиму, число коливань, тощо) процесу встановлення ціни на ринку товарів, які не потребують традиційного обчислення коренів характеристичного рівняння економіко-математичної моделі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ринок товарів, область стійкості, функція.

В теорії економічної рівноваги вимагається [1], щоб процес формування цін був глобально стійким, тобто при довільному $p^o > 0$ має існувати границя $\lim_{t\to\infty} p(t) = \bar{p}$, де $\bar{p}$ — деякий вектор рівноважних цін, залежний від p^o. Реально така вимога має відбуватися протягом скінченого часу. Щодо стійкості ціни та інших супутніх їй характеристик існує нагальна потреба в прагматичних оцінках, досить простих, практичної спрямованості.

Постановка проблеми. Моделювання n взаємопов'язаних ринків збуту n видів товару (або послуг), що поступають по одній або кількох зв'язаних між собою галузей промисловості (або систем обслуговування), зводиться до розгляду класичної [2] математичної моделі (ММ).

$$\dot{p} = Ap(t) \qquad (1)$$

де змінна $p(t)$ є вектор цін товарів в момент часу t, $\dot{p}$ — похідна вектора цін, матриця $A = (a_{ij}),\ \ i, j = 1,2,...,n$ постійна. Якщо всі товари взаємозамінюванні, то A є матриця Метцлера, тобто виконується: $a_{ij} < 0$ для $i = j$; $a_{ij} \geq 0,\ i \neq j$.

Відповідь на питання про стійкість цін дає класичний результат — теорема Метцлера: система (1) звичайних диференціальних рівнянь з постійною матрицею коефіцієнтів A стійка тоді і тільки тоді, коли головні мінори матриці A задовольняють умови додатності

$$(-1)^k \det\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1k} \\ a_{21}a_{22}...a_{2k} \\ a_{k1}a_{k2}...a_{kk} \end{bmatrix} > 0 \qquad (2)$$

для всіх k = 1, 2, …, n.

Для розв'язання прикладних задач перевірку умов знаходження великого числа детермінантів, не можна визнати досить зручною, навіть використовуючи комп'ютер. Окрім цього практичний аналіз і синтез економічних систем передбачає знання не тільки стійкості, але й області стійкості, якості, точності тощо.

Підхід до розв'язання проблеми. Не тільки на принциповому рівні, але перш за все з точки зору ефективного практичного застосування головні задачі теорії лінійних процесів було вивчено в техніці складних систем автоматичного управління [3]. Серед множини результатів такого роду привертає увагу праця [4], в якій викладено єдиний підхід до розв'язання основних задач теорії стійкості неперервних і дискретних стаціонарних систем, включаючи запізнення. Слід зазначити, що методи і алгоритми роботи [4] найкращим чином пристосовані до використання комп'ютера, а лаги (запізнення) — невід'ємна складова економіки, її процесів.

Виклад основного матеріалу. Умови (2) не конструктивні з позицій їх комп'ютерної перевірки та відповідей на основні запити економічної практики. Скористаємося новим (на відміну від існуючих [3]) вельми плідним, з точки зору практичного використання підходом [4].

Характеристичне рівняння лінійної стаціонарної системи (1), як відомо [3], записується

$$\det|A - SE| = 0 \Leftrightarrow F(\bar{S}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k S^k \ , \qquad (3)$$

де функція $F(S)$ є алгебричний поліном, комплексна змінна $S = i\omega$ та $i = \sqrt{-1}$ уявна одиниця, ω — коефіцієнт.

Далі розглядається функція логарифмічної похідної характеристичного многочлена

$$R(\omega) = \mathrm{Re}\frac{F'(i\omega)}{F(i\omega)} \, ,$$

де Re позначає дійсну частину комплексної значної функції. Функція $R(\omega)$ просто зображується через коефіцієнти характеристичного рівняння, а саме:

$$F(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega),$$

де $U(\cdot) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - ...$ є дійсна частина, $V(\cdot) =$ $= \omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - ...)$ є уявна частина комплекснозначної функції;

$$R(\omega)=\frac{UV'-VU'}{U^2+V^2},$$

де $U'=\dfrac{dU}{d\omega}\equiv\omega(-2a_2+4a_4\omega^2-...)$ і $V'=\dfrac{dV}{d\omega}\equiv a_1-3a_3\omega^2+5a_5\omega^4-...$.

На підставі функції $R(\omega)$ стійкість системи (1) визначається без традиційного обчислення коренів характеристичного рівняння (3): якщо має місце нерівність $R(\omega)<0$ для деякого ω, то неперервна лінійна стаціонарна система (1) нестійка.

Умова $R(\omega)>0$ необхідна для стійкості, але недостатня.

Таким чином, побудова області стійкості лінійної стаціонарної системи (1), тобто визначення меж змінюваності ціни $p(t)$ товару, зводиться до відшукання області значень додатної функції логарифмічної похідної, що досить зручно виконується на комп'ютері.

В теорії управління фігурує поняття якість системи, яким передбачається не тільки стійкість, а також вимагається наступне: точність $\varepsilon=\lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(t)$, яка являє собою значення похибки системи через проміжок часу після дії збурення; час регулювання, який визначається нерівністю $|p(t)-p(\infty)|<\delta$, де δ — вказана мала величина, за якої відбувається перехідний процес; перерегулювання — відношення найбільшого відхилення регульованої величини від вказаного початкового значення в супротивну сторону; число коливань регульованої величини $p(t)$ на протязі часу τ перехідного процесу.

Випишемо оцінки якості стосовно системи (1) на підставі функції $R(\omega)$, які мають прикладну спрямованість. По-іншому, вони носять практичний характер і перш за все прості при отриманні реальних оцінок.

Для стійких систем має місце нерівність

$$\tau\le\lambda\max_{0<\omega<\infty}R(\omega)$$

оцінка часу регулювання перехідного процесу, де постійна величина $\lambda=3\div5$, узгоджується з точністю установлення режиму.

Число коливань перехідного процесу

$$\beta=\max_{0<\omega<\infty}[\omega\cdot R(\omega)]$$

знаходиться без попереднього визначення коренів характеристичного рівняння.

Аналіз граничних значень параметра β показує, що максимум функцій $R(\omega)$ для $\omega \neq 0$ відповідає монотонному перехідному процесу, а максимум функцій $R(\omega)$ для $\omega = 0$ відповідає немонотонному перехідному процесу, причому коливність підсилюється в міру зростання максимуму $R(\omega)$ та збільшення віддалі цього максимуму від осі ординат.

Оцінка перерегулювання перехідного процесу дається мажорантою

$$p(t) \leq \exp(-\alpha t)\cos\Omega t,$$

де $\alpha = 1/\max R(\omega)$; $\Omega -$ стаціонарна точка глобального максимуму функції $\omega R(\omega)$. Також перерегулювання оцінюється величиною $\sigma \leq \exp[-\pi\alpha/\Omega] \equiv \exp[-\pi/\Omega \max R(\omega)]$.

У випадку додатних коефіцієнтів характеристичного многочлена величина α вибирається за формулою

$$\alpha = (1 + ctg(\varepsilon/n)) \max_{1 \leq m \leq n} (a_m / a_{m-1}).$$

Показник α виразу $\lim\limits_{t \to \infty} C_m(t)\exp(-\alpha t))$ служить мірою оцінки затухання перехідного процесу.

Оцінки величин α і Ω дозволяють побудувати мінораnту і мажоранту для функції $h(t)$ перехідного процесу

$$1 - \exp(-\alpha t)\cos\Omega t < h(t) < 1 + \exp(-\alpha t)\cos\Omega t$$

і неперервної системи (1), характеристичне рівняння якої володіє довільним числом комплексних коренів.

Дуже важливим для економічної практики є питання про стійкість системи цін на ринку товарів при змінюваності якоїсь однієї складової. Побудова області стійкості відносно деякого коефіцієнта характеристичного рівняння виконується наступним чи-ном: збільшується заданий коефіцієнт до тих пір, поки підінтегральна функція $R(\omega)$ додатна; при зміні знаку функцій $R(\omega)$ запам'ятовується значення коефіцієнта як правий кінець область стійкості. Аналогічна процедура повторюється при зменшенні згадуваного вище коефіцієнта, чим встановлюється лівий кінець області стійкості.

Висновки. На підставі досліджень теорії систем автоматичного керування в даній статті встановлено практичні результати, що стосуються не тільки традиційного для економічної практики питання про стійкість цін, але деякі інші важливі для ринку товарів оцінки, як-от: час τ перехідного процесу, регулювання ціни; число коливань режиму переходу від однієї ціни до іншої, перерегулювання; оцінка зверху для діючої ціни $p(t)$ на ринку протягом певного часу; двостороння нерівність для функції $h(t)$ перехідного процесу (трансформації); алгоритм побудови області стійкості щодо зміни якогось параметру ринку товарів. Практичність згадуваних вище результатів проявляється в простоті її застосування і безпосереднього комп'ютерного використання.

Література

1. *Пономаренко О. І., Перестюк М. О., Бурим В. М.* Основи математичної економіки. — К.: Інформ-техніка, 1995. — 320 с.
2. *Касти Дж.* Большие системы. Связность, сложность и катастрофы: Пер.с англ. — М.: Мир, 1982. — 216 с.
3. *Чернецкий В. М., Дирук Г. А., Потапенко А. А.* Математические методы и алгоритмы исследования автоматических систем. — Л.: Энергия, 1970. — 374 с.
4. *Мелкумян Д. О.* Анализ систем методом логарифмической производной. — М.: Энергоиздат, 1981. — 112 с.

Стаття надійшла до редакції 18.01.2006

УДК 517.9

І. А. Джалладова, канд. фіз.-мат. наук, доц.
КНЕУ

ПАРАМЕТРИЧНИЙ РЕЗОНАНС У СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМАХ

Розглянуто приклади розв'язування економічних задач, які зводяться до дослідження стійкості розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь з випадковими коефіцієнтами. При цьому доводиться, що випадкові зміни коефіцієнтів системи можуть викликати різиковий стан — параметричний резонанс.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: лінійні диференціальні рівняння, параметричний резонанс, коефіцієнти.

1. Приклад загальної задачі. Початок портфельного аналізу був покладений в роботах Нобелевського лауреату в галузі економіки, професора Чикагського університету Г. Марковиця у 1952 р. Ним вперше була запропонована модель формування портфелю і було запропоновано методи побудови таких портфелів.