краще заданим критеріям побудови системи моніторингу відповідає платформа BI MicroStrategy — результат п'ятнадцятирічного досвіду розробки програм BI та де-факто стандарт галузі. Розроблений Національним університетом біоресурсів і природокористування України спільно з компанією RG DATA оціночний пілотний проект на основі програмних продуктів платформи BI MicroStrategy показав велику його функціональність та високу ефективність прикладної реалізації подібного класу задач.

Література

1. *Андрей Колесов.* На смену Business Intelligence приходит Business Analytics?// PC Week/RE. — 2007. — №41 (599).

2. Business Intelligence [Електронний ресурс] // Wikipedia[сайт]. — Режим доступу: http://ru.wikipedia.org/wiki/Business_Intelligence

3. Інформаційно-аналітичний центр моніторингу стану агропромислового комплексу України. Пілотний проект. Пояснювальна записка. — 2010.

4. *Давид Харатишвили*. Рынок BI-платформ: претенденты и победители.// Компьютер Пресс. — 2008. — №7

5. *Елена Гореткина*. Рынок систем бизнес-анализа: битва Давида и Голиафа // PC Week/RE. — 2010. — №11 (713).

6. Forrester Wave™. Оценка поставщиков платформ бизнес-анализа (Business Intelligence, BI) [Електронний ресурс] // BSC[сайт]. — Режим доступу: http://www.bsc-consulting.ru/advantages/cognos/forrester02/

Стаття надійшла до редакції 08.11.2010 р.

УДК 517.929

І. А. Джалладова, д-р фіз.-мат. наук,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГОРІВНЯННЯ З ВИПАДКОВИМИ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ ЙОГО РОЗВ'ЯЗКІВ

АННОТАЦІЯ. Досліджується стійкість у середньому квадратичному розв'язку зі стрибками, що відбуваються у випадкові моменти часу з випадковим розміром стрибка різних видів стохатичних рівнянь. Припускається, що час між стрибками розподіляється за експоненціальним законом, а розмір стрибка розподілений за степеневим законом. Здобуто в явному вигляді умови стійкості випадкового розв'язку рівнянь, що розглядається.

АННОТАЦИЯ. Исследуется устойчивость в среднем квадратичном решении со скачками, которые происходят в случайные моменты времени со случайным размером скачка разных видов стохастических уравнений. Предполагается, что скачки происходят в случайные моменты времени. Получены в явном виде условия устойчивости и построены границы областей неустойчивости случайного решения рассматриваемых систем.

ANNOTATION. Investigating stability in mean square of solution with jumps which occurred in random times with random size of jump. We suggestion that time devoted on exponential formula and size of jump devoted on series formula. We receive condition of stability of random solution considering equations.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. еволюційне рівняння, стійкість у середньому квадратичному, випадкові перетворення розв'язків, перетворення Лапласа, модель добробуту.

Вступ

Економічні системи, як правило, є стохастичними, бо початкові параметри системи випадковим чином залежать від вхідних параметрів. Крім того, економічна система є складною, багатокритеріальною, багаторівневою, ієрархічною структурою; система знаходиться під впливом зовнішніх факторів; і можливому перекрученню інформацію, приховуванню інформації та цілеспрямованої економічної діверсиї.

Виходячи з цього, економічна система складна і містить залежність від випадкових параметрів і описуються марковським, а в реаліях напівмарковським апаратом, тобто коли поводження системи в момент t_0 характеризуються ймовірністю першого порядка $p(x_0, t_0)$ і поведінка системи в наступному залежить від значення системи x_0 і не залежить від того, коли і як система пришла в такий стан.

Марковські випадкові процеси описуються двома параметрами:

1) ймовірністю першого порядка $p(x_0, t_0)$;

2) умовною ймовіністю $p_{ij}\ (x_2\ t_2\ /x_1\ t_1)$;

де p_{ij} характеризує стан системи x_2 в момент t_2, за умови, що в момент t_1 система мала значення x_1.

Маючи в своєму розпорядженні матрицю умовних переходів

$$P_{i/j} = \begin{pmatrix} p_{11} \cdots p_{1n} \\ p_{21} \cdots p_{2n} \\ p_{n1} \cdots p_{nn} \end{pmatrix},$$

можливо напочатку досліджень сформулювати поведенку системи в наступному.

Треба підкреслити, що називається станом системи, не визначається лише фізичними властивостями, системи, що вивчаєтьсяся.Тому не є необхідним поглиблюватися внутрішню характеристику систему. Все залежить від того, що ми хочемо знати про процеси, що ми можемо спостерігати або вимірювати, від точності цих спостережень і взагалі від математичного рівня на теперешній час. Не існує ніяких готових аналітичних методів і ніяких готових формулювань. В минулому більшість аналітичних робіт по вивченню економічних систем описувалась функціональними рівняннями і містила дуже важливі результати [6—13]. Проте, нові задачі потребують розгляду нових класів рівнянь, нових методів, які дозволяють дати відповіді на запити сучасної науки, зокрема, зробити більш повним використання ПП ПЄОМ.

Далі ми розглядаємо деякі популярні моделі для вивчення певних економічних систем — лінійні еволюційні рівняння, а також їх застосування до дослідження модельних задач.

1. На ймовірносному просторі (Ω, F, P) розглянемо лінійне еволюційне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\xi(t))x(t), \tag{1}$$

де $\xi(t)$ — випадковий напівмарковський процес, що набуває n станів θ_1, θ_2, ..., θ_n з інтенсивностями

$$q_{jj}(t) \equiv 0, \quad q_{js}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{T_{js}} & \text{при } 0 \le t < T_{js}, \\ 0 & \text{при } t \ge T_{js} \end{cases} \tag{2}$$

$(j,\ s = 1,\ ...,\ n)$.

Нехай випадкова величина $\alpha(\xi(t))$ набуває значення $\alpha(\xi(t)) = \alpha_k$ при $\xi(t) = \theta_k$ $(k = 1,\ ...,\ n)$.

Припускаємо, що в моменти стрибків t_j розв’язки (1) зазнають випадкових перетворень

$$x(t_j + 0) = p_1 x(t_j - 0), \quad p_1 \ne 0 \quad (l = 1,\ ...,\ N) \tag{3}$$

з ймовірностями p_l $(l = 1,\ ...,\ N)$.

Як відомо, випадковим перетворенням розв’язку рівняння (1) відповідають наступні стохастичні оператори S_{rl} [2]

$$S_{rl} f(Y) \equiv \sum_{s=1}^{N_{rl}} p_{r,\,l,\,s} f\left(A^{-1}_{r,\,l,\,s}\right) \left|\det A^{-1}_{r,\,l,\,s}\right| \quad (r,\ l = 1,\ ...,\ n).$$

Стохастичні оператори S_{rl} $(r,\ l = 1,\ ...,\ n)$, для перетворень вигляду (3) матимуть вигляд

$$S_{sl} f(Y) = \begin{cases} f(Y), & r = l, \\ \sum\limits_{s=1}^{N} \dfrac{p_s}{p_s} f\left(\dfrac{Y}{p_s}\right), & r \neq 1. \end{cases}$$

Введемо рівняння для моментів другого порядку розв'язків лінійного диференціального рівняння (1). Спочатку обчислимо C_{ks} $(k,\ s = 1,\ ...,\ N)$:

$$C_{ks} = \begin{cases} 1, & k = s, \\ \sum\limits_{l=1}^{N} p_1 p_1, & k \neq s. \end{cases}$$

Визначимо функції W_{ks} $(k,\ s = 1,\ ...,\ n)$, згідно з рівняннями

$$W_k(t) = M_2 \left[\sum_{\substack{s=1 \\ k \neq s}}^{n} q_{ks}(t) e^{2a_s t} ds(0) + \int_0^t \sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t-\tau) e^{2a_s(t-\tau)} W_s(\tau) d\tau \right]; \qquad (4)$$

$$(k = 1,\ ...,\ n),\ M_2 \equiv \sum_{l=1}^{N} \rho_1^2 p_1 = \left\langle \rho^2 \right\rangle.$$

Тут M_2 — математичне сподівання квадрата коефіцієнта ρ при випадкових перетвореннях; $d_k(0)$ $(k = 1,\ ...,\ n)$ — моменти другого порядку в момент часу $t = 0$; $N_k(t) = e^{\alpha_k t}$ — розв'язок рівняння (1); $W_k(t)$ — моменти другого порядку, що визначаються за формулою (4).

Розв'язуватимемо систему моментних рівнянь (4), використовуючи перетворення Лапласа. Позначимо

$$f_k(p) \equiv \int_0^\infty W_k(t) e^{-pt} dt \quad (k = 1,\ ...,\ n).$$

Помножимо систему рівнянь (4) на e^{-pt} і зінтегруємо від 0 до ∞. Дістанемо систему рівнянь для зображень $f_k(p)$:

$$f_k(p)=M_2\left[\int_0^\infty\sum_{\substack{s=1\\k\neq s}}^{n}q_{ks}e^{2a_st}e^{-pt}ds(0)dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty\int_0^t\sum_{\substack{s=1\\k\neq s}}^{n}q_{ks}(t-\tau)e^{2a_s(t-\tau)}e^{-pt}W_s(\tau)d\tau\;d\tau\right]\quad(k=1,\;\ldots,\;n).\tag{5}$$

Оскільки справджується рівність

$$\int_0^\infty q_{ks}e^{-pt}dt=\frac{1-e^{-pT_{ks}}}{T_{ks}p}\quad(k,\;s=1,\;\ldots,\;n;\;\;k\neq s),$$

то з урахуванням властивості запізнення [4] дістанемо:

$$\int_0^\infty q_{ks}e^{2a_st}e^{-pt}dt=\frac{1-e^{-T_{ks}(p-2a_s)}}{T_{ks}(p-2a_s)}\quad(k,\;s=1,\;\ldots,\;n;\;\;k\neq s).$$

Згідно з властивістю згортки [1] обчислимо

$$\int_0^\infty\int_0^t q_{ks}(t-\tau)e^{2a_s(t-\tau)}e^{-pt}W_s(\tau)d\tau\,dt=\frac{1-e^{-T_{ks}(p-2a_s)}}{T_{ks}(p-2a_s)}.$$

Систему рівнянь (5) можна записати у вигляді

$$f_k(p)=M_2\left[\sum_{\substack{s=1\\k\neq s}}^{n}d_s(0)\frac{1-e^{-T_{ks}(p-2a_s)}}{T_{ks}(p-2a_s)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{s=1\\k\neq s}}^{n}f_s(p)\frac{1-e^{-T_{ks}(p-2a_s)}}{T_{ks}(p-2a_s)}\right]\quad(k=1,\;\ldots,\;n),\tag{6}$$

або

$$f_k(p)=M_2\left(b_k(p)+\sum_{\substack{s=1\\k\neq s}}^{n}a_{ks}f_s(p)\right)\quad(k=1,\;\ldots,\;n),$$

де $b_k(p)\equiv\sum_{\substack{s=1\\k\neq s}}^{n}d_s(0)\frac{1-e^{-T_{ks}(p-2a_s)}}{T_{ks}(p-2a_s)};\;\;a_{ks}(p)\equiv\frac{1-e^{-T_{ks}(p-2a_s)}}{T(p-2a_s)}\quad(k,\;s=1,\;\ldots,n;\;\;k\neq s).$

Розв’яжемо систему рівнянь (6) за теоремою Крамера. Особливі точки розв’язку будуть визначатися коренями рівняння

$$\det\left\| 1 - M_2 a_{ks}(p,\ T_{ks}) \right\|_{k,\,s}^{n} = 0,\ \ M_2 a_{kk}(p,\ T_{ks}) \equiv -1. \tag{7}$$

Нулі рівняння (7) є характеристичними показниками розв’язків системи інтегральних рівнянь (4). Якщо всі корені рівняння (7) мають від’ємні дійсні частини, то розв’язки рівнянь (6) асимптотично стійкі. Якщо хоча б один із коренів рівняння (7) має додатну дійсну частину, то розв’язки системи рівнянь (6) нестійкі.

Розв’язавши систему алгебраїчних рівнянь (7) числовими методами, визначимо характер залежності між параметрами p і T_{ks}.

2. Розглядається лінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\xi(t))x(t), \tag{8}$$

де $\xi(t)$ — напівмарковський випадковий процес, який визначається інтенсивностями $q_{sj}(t)$, $(s,\ j = 1,\ 2, ..., n)$. Припускаємо, що при $a_s = a(\theta_s)$ $(s = 1,\ 2, ...,\ n)$ рівняння (8) набирає вигляду

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = a_s x_s(t),\ \ (s = 1,\ 2,\ ..., n).$$

Ця система рівнянь має фундаментальні матриці розв’язків

$$N_S(t) = e^{A_s t},\ \ (s = 1,\ 2, ...,\ n).$$

Система моментних рівнянь першого порядку набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&M_s(t) = \psi_s(t)N_s(t)M_s(0) + \int_0^t \psi_s(t-\tau)W_s(\tau)d\tau,\\
&W_s(\tau) = \sum_{r=1}^{n} q_{kr}(t)N_r(t)M_r(0) + \sum_{r=1}^{n}\int_0^t q_{kr}(t-\tau)N_r(t-\tau)W_r(\tau)d\tau,\\
&q_s(t) = \sum_{k=1}^{n} q_{ks}(t),\ \ (s = 1,\ 2, ...,\ n).
\end{aligned} \tag{9}$$

Для розв’язування системи рівнянь застосовуємо перетворення Лапласа. Введемо позначення:

$$\int q_{sr}(t)e^{-pt}dt = f_{sr}(p),$$

$$W_s(t) \doteq U_s(p),\ \ M_s(t) \doteq V_s(p),\ \ \psi_s(t) \doteq s_s(p),$$

$$\psi_s(t) = -q_s(t),$$

$$ps_s(p) - 1 = f_s(p) \Rightarrow s_s(p) = \frac{1 - f_s(p)}{p},\ \ (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Із рівнянь (9) знаходимо системи рівнянь для зображень:

$$V_s(p) = \frac{1 - f_s(p - a_s)}{p - a_s}\left(M_s(0) + U_s(p)\right),$$

$$U_s(p) = \sum_{r=1}^{n} f_{sr}(p - a_r)\left(M_r(0) + U_r(p)\right).$$

Позначивши

$$W_s(p) = U_s(p) + M_s(0),$$

запишемо цю систему рівнянь у виді

$$V_s(p) = \frac{1 - f_s(p - a_s)}{p - a_s} W_s(p),$$

$$W_s(p) = M_s(0) + \sum_{r=1}^{n} f_{sr}(p - a_r) W_r(p),\ \ (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Особливі точки зображення $V_s(p),\ (s = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ визначаються особливими точками зображень $W(p)$ і є коренями рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 - f_{11}(p - a_1) & -f_{12}(p - a_2) & \ldots & -f_{1n}(p - a_n) \\ -f_{21}(p - a_1) & 1 - f_{22}(p - a_2) & \ldots & -f_{2n}(p - a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -f_{n1}(p - a_1) & -f_{n2}(p - a_2) & \ldots & 1 - f_{nn}(p - a_n) \end{vmatrix} = 0. \qquad (10)$$

Рівняння (10) можна використовувати для знаходження меж області нестійкості розв’язків системи рівнянь (8) в просторі параметрів $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$.

Модельна задача 2.1. Розглядається система рівнянь (8) у випадку, коли $n = 2$, інтенсивності переходу $q_{sj}(t),\ (s,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ мають вигляд

$$q_{11}(t) \equiv q_{22}(t) \equiv 0,$$
$$q_{12}(t) = q_{21}(t) = \frac{\alpha\left(\alpha^2 + 4w^2\right)}{2w^2} = e^{-\alpha t} \sin^2 wt.$$

Рівняння (10) має вигляд:

$$f_{12}(p - a_2) f_{21}(p - a_1) = 1.$$

При $p = 0$ знаходимо рівняння межі області нестійкості у просторі параметрів $a_1, \ a_2$:

$$\frac{\alpha^2\left(\alpha^2 + 4w\right)^2}{(-\alpha_1 + \alpha)(-a_2 + \alpha)\left((-a_1 + \alpha)^2 + 4w^2\right)\left((-a_2 + \alpha)^2 + 4w^2\right)} = 1.$$

Наприклад, якщо $\alpha = 1, \ \ w = 1$ маємо рівняння межі області нестійкості (рис.1):

$$\frac{25}{(1 - a_1)(1 - a_2)\left((a - a_1)^2 + 4\right)\left((1 - a_2)^2 + 4\right)} = 1.$$

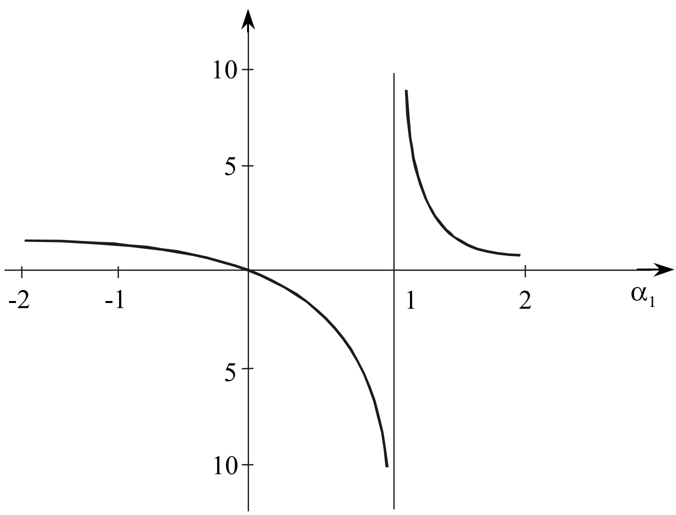

Рис. 1

Модельна задача 2.2. Розглядається система рівнянь (8) у випадку, коли $n = 3$, інтенсивності переходу $q_{sj}(t)$ $(s, \ j = 1, \ 2, \ldots, \ n)$ є сталими:

$$q_{11}(t) = q_{22}(t) = q_{33}(t) = 0,$$

$$q_{12}(t) = q_{21}(t) = q_{13}(t) = q_{31}(t) = q_{23}(t) = q_{32}(t) = \begin{cases} T^{-1}, \ 0 \le t \le T \\ 0, \ t > T. \end{cases}$$

Рівняння (10) має вигляд:

$$1 - 2f(p-a_1)f(p-a_2)\,f(p-a_3) - f(p-a_1)\,f(p-a_2) -$$
$$- f(p-a_2)\,f(p-a_3) - f(p-a_1)\,f(p-a_3) = 0,$$

де позначено $f(p) = \dfrac{1-e^{-pT}}{pT}$.

При $p = 0$ знаходимо рівняння межі області нестійкості у просторі параметрів a_1, a_2, a_3 (рис. 2—4):

$$1 - 2\frac{1-e^{a_1T}}{a_1T}\frac{1-e^{a_2T}}{a_2T}\frac{1-e^{a_3T}}{a_3T} - \frac{1-e^{a_1T}}{a_1T}\frac{1-e^{a_2T}}{a_2T} - \frac{1-e^{a_2T}}{a_2T}\frac{1-e^{a_3T}}{a_3T} - \frac{1-e^{a_3T}}{a_1T}\frac{1-e^{a_3T}}{a_3T} = 0.$$

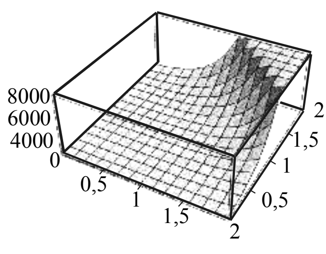

Рис. 2

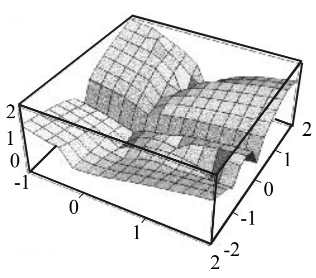

Рис. 3 $\left(z = 1, \quad \alpha, \omega, \gamma = \dfrac{1}{3}\right)$

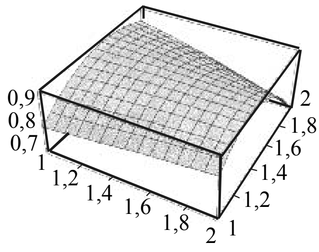

Рис. 4

3. Досліджуємо стійкість нульового розв'язку лінійного диференціального рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\xi(t)\, x(t)),$$

де $\xi(t)$ — напівмарковський процес, що приймає два стани. Припускаємо, що:

$$1.\; a(\theta_r) \equiv a_k \, (k = 1, 2);$$

$$2.\; q_{12} = q_{21} = \begin{cases} \dfrac{1}{T}, & 0 \le t \le T \\ 0, & t > T \end{cases};$$

$$q_{11}(t) = q_{22}(t) \equiv 0,$$

і

$$\Psi_1(t) = \Psi_2(t) = 1 - \frac{t}{T}, \quad (0 \le t \le T),$$

$$\Psi_1(t) = \Psi_2(t) = 0, \quad (t > T).$$

Система рівнянь (4) набуває виду

$$M_1(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) e^{a_1 t} + \int_0^T \frac{1}{T} M_2(t - \tau) e^{a_1 \tau} dt,$$

$$M_2(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) e^{a_2 t} + \int_0^T \frac{1}{T} M_2(t - \tau) e^{a_2 \tau} dt.$$

Математичне сподівання $M(t) = \langle x(t) \rangle = M_1 + M_2 \to 0$, якщо $M_1(t) \to 0,\; M_2(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Для дослідження стійкості використовуємо перетворення Лапласа. Припускаємо

$$y_k(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} M_k(t) dt;$$

$$f_k(p) = \frac{1}{p - a_k} - \frac{1}{T(p - a_k)^2}; \tag{11}$$

$$\varphi(p) = \int_0^{\infty} \frac{1}{T} e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-pt}}{T}.$$

З урахуванням (11) отримаємо систему рівнянь:

$$y_1(p) = f_1(p) + \varphi(p - a_1)y_2(p);$$
$$y_2(p) = f_2(p) + \varphi(p - a_1)y_1(p).$$

Особливі точки зображення $y_k(p)$, $(k = 1, 2)$ визначаються з рівняння

$$1 - \varphi(p - a_1)\,\varphi(p - a_2) = 0\,.$$

Покладаючи $p = 0$ знаходимо рівняння для границі області нестійкості (рис. 5, 6):

$$\left(e^{a_1 T} - 1\right)\left(e^{a_2 T} - 1\right) = a_1 a_2 T^2\,.$$

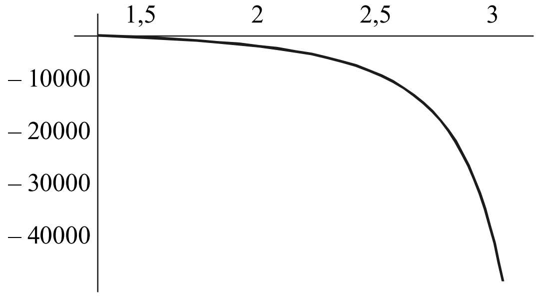

Рис. 5 $(T = 2 \quad C_1 = 3, \quad C_2 = 4)$

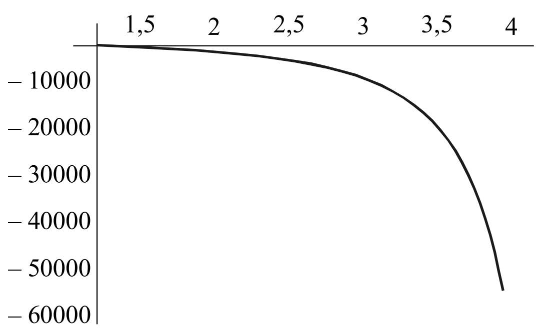

Рис. 6 $(T = 2 \quad C_1 = C_2 = 1)$

Модельна задача 3.1. Розглянемо лінійне різницеве рівняння

$$x_{k+1} = a(\xi_k)x_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \; a(\theta_s) = a_s \; (s = 1, 2, \ldots, n), \quad (12)$$

де напівмарковський ланцюг ξ_k може набувати два стани θ_1, θ_2 і визначається інтенсивностями:

$$Q(1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q(k) = 0 \quad (k = 3, 4, \ldots, n), \quad \Psi(k) = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Система моментних рівнянь [5] набуває виду:

$$M_1(0) = 1,$$

$$M_1(1) = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}M_2(0)a_1,$$

$$M_1(2) = \frac{1}{2}M_2(1)a_1 + \frac{1}{4}M_1(0)a_1^2 + \frac{1}{4}M_2(0)\,a_1^2,$$

$$M_1(3) = \frac{1}{2}M_2(2)a_1 + \frac{1}{4}M_1(1)a_1^2 + \frac{1}{4}M_2(1)\,a_1^2, \ldots$$

$$M_2(0) = 1,$$

$$M_2(1) = \frac{1}{2}a2 + \frac{1}{2}M_1(0)a_2,$$

$$M_2(2) = \frac{1}{2}M_1(1)a_2 + \frac{1}{4}M_2(0)a_2^2 + \frac{1}{4}M_1(0)\,a_2^2,$$

$$M_2(3) = \frac{1}{2}M_1(2)a_2 + \frac{1}{4}M_2(1)a_2^2 + \frac{1}{4}M_1(1)\,a_2^2, \ldots$$

Із цієї системи рівнянь знайдемо $M_1(k), M_2(k)$:

$$M_1(0) = 1, \qquad M_2(0) = 1,$$

$$M_1(1) = a_1, \qquad M_2(1) = a_2,$$

$$M_1(2) = \frac{a_1}{2}(a_1 + a_2), \quad M_2(2) = \frac{a_2}{2}(a_1 + a_2),$$

$$M_1(3) = \frac{a_1}{4}(a_1 + a_2)^2, \quad M_2(3) = \frac{a_2}{4}(a_1 + a_2)^2,$$

$$M_1(4) = \frac{a_1}{8}(a_1 + a_2)^3, \quad M_1(4) = \frac{a_2}{8}(a_1 + a_2)^3.$$

Далі знаходимо математичне сподівання випадкового розв'язку x_k рівняння (12)

$$\langle x_k \rangle = \frac{a_1}{2^{k-1}}\left(a_1 + a_2\right)^{k-1}\langle x_0 \mid \xi_0 = \theta_1 \rangle.\ P\{\xi_0 = \theta_1\} + \frac{a_2}{2^{k-1}}\left(a_1 + a_2\right)^{k-1}\langle x_0 \mid \xi_0 = \theta_2 \rangle.\ P\{\xi_0 = \theta_2\}.$$

Аналогічно знаходимо другий момент:

$$\langle x_k{}^2 \rangle = \frac{a_1^2}{2^{k-1}}\left(a_1^2 + a_2^2\right)^{k-1}\langle x_0^2 \mid \xi_0 = \theta_1 \rangle.\ P\{\xi_0 = \theta_1\} + \frac{a_2^2}{2^{k-1}}\left(a_1^2 + a_2^2\right)^{k-1}\langle x_0^2 \mid \xi_0 = \theta_2 \rangle.\ P\{\xi_0 = \theta_2\}.$$

Модельна задача 3.2. Нехай напівмарковський процес $\xi(t)$, що набуває двох станів θ_1 і θ_2, співпадає з марковським процесом, заданим системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_1(t) + \lambda p_2(t),\ \frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - \lambda p_2(t).$$

Складемо систему моментних рівнянь [5] для дослідження L_2-стійкості [2] розв'язків диференціального рівняння:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\xi(t))x(t),\ a(\theta_k) \equiv a_k\ . \tag{13}$$

Спочатку знаходимо

$$c_1 = 1 + \int_0^\infty e^{2a_2 t}\lambda e^{-\lambda t} c_2 dt\ ,\ c_2 = 1 + \int_0^\infty e^{2a_1 t}\lambda e^{-\lambda t} c_1 dt\ ,$$

і має розв'язок

$$c_1 = \frac{(\lambda - a_1)(\lambda - 2a_2)}{2a_1 a_2 - \lambda(a_1 + a_2)},\ c_2 = \frac{(\lambda - a_2)(\lambda - 2a_1)}{2a_1 a_2 - \lambda(a_1 + a_2)}.$$

При $c_1 > 0$ і $c_2 > 0$ нульовий розв'язок рівняння (13) стійкий.

Нехай інтенсивності напівмарковського процесу $\xi(t)$ задовольняють умови

$$q_{11}(t) \approx 0\ ,\ q_{22}(t) \approx 0\ ,\ q_{21}(t) - \lambda e^{-\lambda t} \approx 0\ ,\ q_{12}(t) - \lambda e^{-\lambda t} \approx 0\ .$$

Тоді знаходимо достатню умову стійкості розв'язків рівняння (13):

$$1-c_1\int_0^\infty q_{11}(t)e^{2a_1t}dt-c_2\int_0^\infty\left(q_{21}(t)-\lambda e^{-\lambda t}\right)e^{2a_2t}dt>0\,,$$

$$1-c_1\int_0^\infty\left(q_{12}(t)-\lambda e^{-\lambda t}\right)e^{2a_1t}dt-c_2\int_0^\infty q_{22}(t)e^{2a_1t}dt>0\,.$$

Модельна задача 3.3. Дослідимо стійкість у середньому квадратичному розв'язків різницевого рівняння

$$x_{k+1}=a(\xi_k)x_k\,,\ a(\theta_s)\equiv a_s\quad(s=1,...,n). \tag{14}$$

Припустимо, що в кожному стані θ_s $(s=1,...,n)$ напівмарковський ланцюг ς_k може здійснити всього N кроків і з імовірністю N^{-1} на кожному кроці може перейти в інший стан. Система рівнянь побудови послідовних наближень [14] набирає вигляду

$$c_1=h_1+(c_{21})^2\left(a_2^2+a_2^4+...+a_2^{2N}\right)N^{-1}c_2\,,$$

$$c_2=h_2+(c_{12})^2\left(a_1^2+a_1^4+...+a_1^{2N}\right)N^{-1}c_1\,,$$

а умова збіжності методу послідовних наближень така:

$$(c_{21})^2(c_{12})^2\sum_{k=1}^N a_1^{2k}\sum_{k=1}^N a_2^{2k}<1\,.$$

Ця умова достатньою для асимптотичної стійкості розв'язків рівняння (14) у середньому квадратичному.

4. Модель добробуту. Розглянемо просту модель доброту країни, яка визначена різницевим рівнянням:

$$x_{n+1}=a_n(\xi_n)x_n\,,\ x_n>0\,, \tag{15}$$

де величина x_n описує добробут деякої країни, марковський процес ξ_n приймає два стани $\xi_n=a>1,\xi_n=b<1$ з імовірностями $p_1(n)=P\{\xi_n=a\},\ \ p_2(n)=P\{\xi_n=b\}$,

які задовольняють систему рівнянь:

$$p_1(n+1)=(1-\lambda)p_1(n)+\nu p_2(n)\,,\ 0<\lambda<1\,,$$

$$p_2(n+1)=\lambda p_2(n)+(1-\nu)p_2(n)\,,\ 0<\nu<1.$$

Якщо $\xi_n = a > 1$, то з рівняння (15) слідує, що добробут збільшується, бо $x_{n+1} > x_n$.

Якщо $\xi_n = b < 1 \ (b > 0)$, то добробут країни зменшується.

Будемо вважати, що якщо влада в країні народна, то $\xi_n = a > 1$. Якщо влада в країні антинародна, то $\xi_n = b < 1$. Іншими словами, народна влада з імовірністю $(1-\lambda)$ залишається народною, а з імовірністю λ стає антинародною. Антинародна влада з імовірністю v стає народною, а з імовірністю $(1-v)$ залишається антинародною.

Зміна математичного сподівання $m(n) = < x_n >$ описується системою різницевих рівнянь:

$$m_1(n+1) = (1-\lambda)am_1(n) + vbm_2(n),$$

$$m_2(n+1) = \lambda am_1(n) + (1-v)bm_2(n).$$

Для того, щоб математичне сподівання добробуту $m(n) = m_1(n) + m_2(n)$ зростало необхідно і достатньо, щоб найбільше власне число матриці

$$A = \begin{pmatrix} (1-\lambda)a & vb \\ \lambda a & (1-v)b \end{pmatrix}$$

було більше одиниці.

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} z-(1-\lambda)a & -vb \\ -\lambda a & z-(1-v)b \end{vmatrix} = 0$$

Переходимо до рівняння межі, які розділяють антинародні та народні влади:

$$\Delta(1) = (1-a+\lambda a)(1-b+vb) - \lambda vab = 0,$$

Для збільшення добробуту країни повинна бути достатньо малою ймовірність переходу

$$\lambda < \frac{a-1}{a}\left(1 + v\frac{b}{1-b}\right)$$

від хорошого управління до хорошого, або достатньо велика ймовірність переходу

$$v > \frac{1-b}{b}\left(\frac{\lambda a}{a-1}-1\right)$$

від поганого управління до хорошого.

Наприклад, якщо $a=1{,}2;\, b=0{,}8,$ то матимемо нерівність

$$\lambda \le \frac{1}{6}(1+4v),\ v \ge \frac{1}{4}(6\lambda-1).$$

Якщо ці нерівності не виконуються, то добробут країни зменшується.

Література

1. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970. — 240 с.

2. *Джалладова І. А.* Оптимизация стохастичних систем. — К.: КНЕУ, 2004. — 258 с.

3. *Валеев К. Г., Финин Г. С.* Построение функции Ляпунова. — К.: Наукова думка, 1981. — 412 с.

4. *Зубов В. И.* Методы Ляпунова и их применения. — Л.: Из-во ЛГУ, 1957. — 241 с.,

5. *Валєєв К. Г.* Оптимізація випадкових процесів / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. —К. : КНЕУ, 2006. — 310 с.

6. *Ватанабе Ш.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / Ш. Ватанабе, Н. Кеда. — М. : Мир, 1984. — 445 с.

7. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. — М. : Наука, 1964. —576 с.

8. *Винер Н.* Нелинейные задачи в теории случайных процессов / Н. Винер. — М. : ИЛ, 1960. — 160 с.

9. *Вольтер Я.* Стохастические модели в экономике / Я. Вольтер. — М.: Статистика, 1967. — 320 с.

10. *Вонем В. М.* Стохастические дифференциальные уравнения в теории управления / В. М. Вонем // Математика. — 1973. — Т. 17. — № 4. — С. 129—167; Т. 5. — С. 82—114.

12. *Гихман И. И.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1987. — 612 с.

13. *Гихман И. И.* Введение в теорию случайных процессов / И. И. Гихман, А.В. Скороход. — М.: Наука, 1977. — 567 с.

14. *Джалладова І. А.* Дослідження стійкості розв’язків системи динамічних систем з напімарковсськми коефіцієнтами та побудова моделі для дослідження сітуації з безробіттям // Моделювання та інформаційні системи в економіці. — К.: КНЕУ, 2010. — С. 180—199.

Стаття надійшла до редакції 09.11.2010 р.