VI. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

УДК 517.9: 330.42

О. І. Неня, канд. фіз.-мат. наук,
ст. викладач, кафедра вищої математики,
ДВНЗ «Київський національний економічний
університет імені Вадима Гетьмана»

РОЗВ'ЯЗОК ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ РОЗВИТКУ ПІДПРИЄМСТВА

АНОТАЦІЯ. В публікації досліджується проблема побудови динамічної моделі розвитку підприємства в умовах кредитування та короткотривалих зовнішніх впливів на виробництво, а також побудова розв'язку функіонально-диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами, несталим запізненням та імпульсною дією, яке описує дану модель.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: динамічна система, імпульсне диференціальне рівняння, нелінійне запізнення, фундаментальна функція, спряжене рівняння, асимптотична стійкість, тривіальний розв'язок.

АННОТАЦИЯ. В публикации исследуются проблемы построения динамической модели развития предприятия в условиях кредитирования и кратковременных внешних воздействий на производство, а также построения решения функционально-дифференциального уравнения с переменными коефициентами та импульсным воздействием, которое описывает данную модель.

ANNOTATION. In article we analyse the problems of the construction of a dynamic model of development of enterprise in the conditions of crediting and of external influences on the production, as well as the construction of the solution of functional-differential equation with variable coefficients and impulses that describes this model.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: динамическая система, импульсное дифференциальное уравнение, нелинейное запаздывание, фундаментальная функция, сопряженное уравнение, асимптотическая устойчивость, тривиальное решение.

KEYWORDS: dynamical system, impulsive differential equetion, nonconstant delay, fundamental function, conjecture equetion, asymptotic stability, trivial solution.

Постановка задачі. Розглянемо диференціальне рівняння Бернулі природнього приросту $x'(t) = kx(t),$ для якого Дж. К'ютелет запропонував замість сталого коефіцієнта k розглядати спадаючу функцію $k(x)$, яка залежить від розв'язку рівняння та часу [10].

$$x'(t) = k(x,t)x(t). \tag{1}$$

Використовуючи рівняння (1) розглянемо математичну модель вибуття фондів. Припустимо, що коефіцієнт k залежить лише від часу і має від'ємний знак, який означає що фонди вибувають.

Тоді зростання кількості продукції на підприємстві, яка вироблена в момент часу t описується наступним рівнянням

$$x'(t) = -k(t)x(t). \tag{2}$$

На основі рівняння (1) розглянемо модель зростання виробництва з урахуванням банківських інвестицій, яка описується таким рівнянням

$$x'(t) = k(x)x(t) + u(t,x), \quad u(t,x) > 0. \tag{3}$$

Об'єднаємо моделі (2) та (3). Нехай підприємство виробляє певну продукцію, але при цьому відбувається швидке зношування устаткування і підприємство не інвестує отримані гроші у виробництво. Грошові вкладання у виробництво здійснює лише банк, тобто в момент часу t потік капіталовкладень складає $u(t)$ умовних одиниць і вдразу ж перетворюється в розширене виробництво.

Тоді вартість продукції $x(t)$ виробленої в момент часу t описується рівнянням

$$x'(t) + k(t)x(t) = u(t). \tag{4}$$

Доданок $u(t)$ виражає потік зовнішніх капіталовкладень, але також може означати інші зовнішні впливи на підприємство.

Якщо вважати, що функція $u(t)$ і коефіцієнт $k(t)$ залежать не тільки від часу, а і від об'єму випуску продукції $x(t)$, то отримаємо узагальнене рівняння росту продукції

$$x'(t) + k(t,x)x(t) = u(t,x). \tag{5}$$

Рівняння (5) можна застосувати для побудови динамічної моделі розвитку підприємства в умовах кредитування та короткотривалих зовнішніх впливів на виробництво. Така модель описується наступним рівнянням [11]

$$A'(t) = -a(t)A(t) + c(t)R(g(t)) + I(t), \qquad (6)$$

де $A(t)$ — вартість основних виробничих фондів, $a(t)$ — темп вибуття основних фондів, інвестування коштів відбувається за рахунок кредитних ресурсів $I(t)$, та деякої частини $c(t)$ чистого прибутку $R(g(t))$, який залежить від попередніх станів динамічної системи.

Якщо чистий прибуток $R(g(t))$ прямопропорційно залежить від фондів $A(g(t))$ з коефіцієнтом пропорційності q, а вартість основних виробничих фондів $A(t)$ імпульсивно змінюється на величину b_k в певні моменти часу, то рівняння (6) запишеться у вигляді імпульсного диференціального рівняння із запізненням

$$\begin{gathered} A'(t) = -a(t)A(t) + c(t)qA(g(t)) + I(t), \quad t \neq t_k, \\ A(t_k + 0) = (1 + b_k)A(t_k) + \beta_k, \quad t = t_k. \end{gathered} \qquad (7)$$

Допоміжні результати. Імпульсні диференціальні рівняння із запізненням в останні десятиліття притягують увагу багатьох дослідників завдяки їх широкому застосуванню в багатьох областях науки та техніки. За допомогою цих рівнянь можна описати процеси, які, з одного боку, залежать від того що відбувалося в попередні моменти часу, а з іншого, зазнають короткострокових змін, тривалість яких є дуже незначною. Важливу роль в розвитку математичної теорії імпульсних рівнянь відіграла перша в світі монографія А. М. Самойленка та М. О. Перестюка [1], яка була перекладена англійською мовою [2]. Протягом останніх років з’явилась ціла низка монографій та публікацій по темі імпульсних рівнянь [3], [4], [5], [6], які продовжують дослідження в даній області.

Розглянемо функіонально-диференціальне рівняння з імпульсною дією аналогічне рівнянню (7):

$$\dot{x}(t) = c(t)x(g(t)) - a(t)x(t) + f(t), \;\; t \neq t_k \qquad (8)$$

$$x(t_k + 0) = (1 + b_k) x(t_k) + \beta_k, \; t = t_k,$$

де $c(t)$, $a(t)$, $f(t)$, $g(t)$ — кусково-неперервні функції, $g(t) < t$, $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} \sup(t - g(t)) < \infty$, $b_k \geq -1$, $\beta_k \in R$, послідовність точок імпульсної дії задовольняє умови $t_1 > t_0$, $t_k - t_{k-1} > 0$, $k \in Z^+$.

Під розв'язком рівняння (8) розуміємо абсолютно неперервну на кожному інтервалі $(t_j, t_{j+1}]$ функцію, яка задовольняє рівняння (8) майже скрізь, а також задовольняє умови імпульсів.

Встановимо який вигляд буде мати розв'язок рівняння (8).

Розглянемо наступне неоднорідне диференціальне рівняння з запізненням

$$x'(t) = \int\limits_{-h(t)}^{0} [d_\theta \eta(t, \theta)] x(t + \theta) + f(t), \tag{9}$$

де Та відповідне йому однорідне рівняння

$$x'(t) = \int\limits_{-h(t)}^{0} [d_\theta \eta(t, \theta)] x(t + \theta). \tag{10}$$

З теорії функціонально-дифференціальних рівнянь відомо, що формально спряжене рівняння до (10) має вигляд

$$y(t) + \int\limits_{t}^{\infty} y(\alpha) \eta(\alpha, t - \alpha) d\alpha = const. \tag{11}$$

Представимо рівняння (9), (10) в більш зручній формі і використаємо рівняння (8), щоб побудувати формально спряжене рівняння однорідного лінійного рівняння з імпульсною дією.

Відповідне однорідне рівняння рівнянню (8) буде:

$$\dot{x}(t) = c(t) x(g(t)) - a(t) x(t), \; t \neq t_k, \tag{12}$$
$$x(t_k + 0) = (1 + b_k) x(t_k), \; t = t_k.$$

Якщо функію $g(t)$ представити у вигляді $g(t) = t - h(t)$, тоді нормована функція $\eta(t, \theta)$ для формально спряженого рівняння буде мати вигляд:

$$\eta(t,\theta)=\begin{cases} a(t)-c(t), \theta\le -h(t), \\ a(t), -h(t)<\theta<0, \\ 0, \theta=0. \end{cases}$$

А саме рівняння запишеться наступним чином

$$y(t)+\int_{t}^{\psi(t)} a(s)y(s)ds+\int_{\psi(t)}^{\infty} y(s)\big(a(s)-c(s)\big)ds=const,\ t\ne t_k,$$

$$y(t_k+0)=\frac{1}{1+b_k}y(t_k),\ t=t_k,$$

де $\psi\big(g(t)\big)\equiv t$.

Останнє рівняння легко перетворюється в таке диференціальне рівняння з імпульсною дією (див. [7], [8], [9])

$$\dot{y}(t)=a(t)y(t)-c\big(\psi(t)\big)y\big(\psi(t)\big)\psi'(t),\ t\ne t_k, \tag{13}$$

$$y(t_k+0)=\frac{1}{1+b_k}y(t_k),\ t=t_k,$$

де $\psi\big(g(t)\big)\equiv t$.

Основні результати.

Теорема 1. Рівняння (13) є спряженим рівнянню (12).

Доведення. Нехай $x(t)$, $y(t)$ — довільні розв'язкі рівнянь (8) та (13) відповідно. Тоді інтегруванням за частинами добутку $x'(t)y(t)$ на інтервалі $\lfloor t_0, t\rfloor$ отримаємо наступний вираз

$$y(t)x(t)-y(t_0)x(t_0)=\int_{t_0}^{t} y'(s)x(s)ds+\int_{t_0}^{t} y(s)c(s)x(g(s))ds-$$

$$-\int_{t_0}^{t} y(s)a(s)x(s)ds+\int_{t_0}^{t} y(s)f(s)ds+$$

$$+\sum_{n(t_0)\le k<n(t)}\big[x(t_k+0)y(t_k+0)-x(t_k)y(t_k)\big]=$$

$$=\int_{t_0}^{t} y(s)a(s)x(s)ds-\int_{t_0}^{t} x(s)y(\psi(s))c(\psi(s))\psi'(s)ds+$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{t_0}^{t} y(s)c(s)x(g(s))ds-\int_{t_0}^{t} y(s)a(s)x(s)ds+\\
&+\int_{t_0}^{t} y(s)f(s)ds+\sum_{n(t_0)\le k<n(t)}\beta_k y(t_k+0)=\\
&=-\int_{t_0}^{t} x(s)y(\psi(s))c(\psi(s))\psi'(s)ds+\int_{t_0}^{t} y(s)c(s)x(g(s))ds+\\
&+\int_{t_0}^{t} y(s)f(s)ds+\sum_{n(t_0)\le k<n(t)}\beta_k y(t_k+0),
\end{aligned}
\tag{14}
$$

де $n(t)=\min\{i\in N: t_i\ge t\}$.

З другим доданком останього виразу проведемо такі перетворення

$$
\int_{t_0}^{t} y(s)c(s)x(g(s))ds=\begin{bmatrix} g(s)=\alpha, \\ s=\psi(\alpha), \\ ds=\psi'(\alpha)d\alpha \\ \end{bmatrix}=
$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_{g(t_0)}^{g(t)} y(\psi(\alpha))c(\psi(\alpha))x(\alpha)\psi'(\alpha)d\alpha=\\
&=\int_{g(t_0)}^{t_0} y(\psi(\alpha))c(\psi(\alpha))x(\alpha)\psi'(\alpha)d\alpha+\\
&+\int_{t_0}^{t} y(\psi(\alpha))c(\psi(\alpha))x(\alpha)\psi'(\alpha)d\alpha-\\
&-\int_{g(t)}^{t} y(\psi(\alpha))c(\psi(\alpha))x(\alpha)\psi'(\alpha)d\alpha
\end{aligned}
$$

і підставимо його в (14). Тоді вираз (14) набуде такого вигляду:

$$
y(t)x(t)-y(t_0)x(t_0)=\int_{g(t_0)}^{t_0} y(\psi(s))c(\psi(s))x(s)\psi'(s)ds-
$$

$$-\int_{g(t)}^{t} y(\psi(s))c(\psi(s))x(s)\psi'(s)ds + \int_{t_0}^{t} y(s)f(s)ds + \sum_{n(t_0)\le k<n(t)} \beta_k y(t_k+0). \quad (15)$$

Позначимо

$$\langle x(t), y(t)\rangle = x(t)y(t) + \int_{g(t)}^{t} y(\psi(s))c(\psi(s))x(s)\psi'(s)ds. \quad (16)$$

Тоді вираз (15) перепишеться у вигляді

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \langle x(t_0), y(t_0)\rangle + \int_{t_0}^{t} y(s)f(s)ds + \sum_{n(t_0)\le k<n(t)} \beta_k y(t_k+0).$$

Якщо $x(t)$ розглядати як розв'язок рівняння (12), то $f(t)\equiv 0$, $\beta_k = 0$ і маємо наступне

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \langle x(t_0), y(t_0)\rangle = \text{const}.$$

З цього можна зробити висновок, що рівняння (13) спряжене до рівняння (12) по відношенню до функції $\langle x(t), y(t)\rangle$ заданої в (16).

Теорему доведено.

Зауваження 1. Аналогічно можна показати, що рівняння (12) в свою чергу є також спряженим до (13).

Означення 1. Розв'язок рівняння (12) $X(t,s)$, якій задовольняє умови $X(s,s)=1$ та $X(t,s)=0$ для $t<s$ називається фундаментальною функцією рівняння (12).

Означення 2. Розв'язок рівняння (13) $Y(t,s)$, якій задовольняє умови $Y(s,s)=1$ і $Y(t,s)=0$ для $t>s$ називається фундаментальною функцією рівняння (13).

Теорема 2. Нехай $X(t,s)$ — фундаментальна функція рівняння (12). Якщо $x(t)$ розв'язок рівняння (8), тоді має місце формула

$$x(t) = X(t,t_0)x(t_0) + \int_{g(t_0)}^{t_0} X(t,\psi(s))c(\psi(s))x(s)\psi'(s)ds + \\ + \int_{t_0}^{t} X(t,s)f(s)ds + \sum_{n(t_0)\le k<n(t)} \beta_k X(t,t_k+0) \quad (17)$$

Доведення. Замінемо $y(s)$ у виразі (15) на фундаментальну функцію $Y(s,t)$ і отримаємо

$$x(t)Y(t,t) - x(t_0)Y(t_0,t) = \int_{g(t_0)}^{t_0} Y(\psi(s),t)c(\psi(s))x(s)\psi'(s)ds -$$
$$- \int_{g(t)}^{t} Y(\psi(s),t)c(\psi(s))x(s)\psi'(s)ds +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} Y(s,t)f(s)ds + \sum_{n(t_0)\le k<n(t)} \beta_k Y(t_k+0,t)\,.$$

Звідки маємо

$$\begin{aligned} x(t) = x(t_0)Y(t_0,t) + \int_{g(t_0)}^{t_0} Y(\psi(s),t)c(\psi(s))x(s)\psi'(s)ds +\\ + \int_{t_0}^{t} Y(s,t)f(s)ds + \sum_{n(t_0)\le k<n(t)} \beta_k Y(t_k+0,t) \end{aligned} \,. \qquad (18)$$

З іншого боку, замінивши $x(t)$ на $X(t,t_0)$ в (18) отримуємо

$$X(t,t_0) = X(t_0,t_0)Y(t_0,t) +$$
$$+ \int_{g(t_0)}^{t_0} Y(\psi(s),t)c(\psi(s))X(s,t_0)\psi'(s)ds +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} Y(s,t)f(s)ds + \sum_{n(t_0)\le k<n(t)} \beta_k Y(t_k+0,t)\,,$$

звідки $X(t,t_0) = Y(t_0,t)$, оскільки $f(t) \equiv 0$, $\beta_k = 0$ для всіх k.

Тому

$$x(t) = X(t,t_0)x(t_0) + \int_{g(t_0)}^{t_0} X(t,\psi(s))c(\psi(s))x(s)\psi'(s)ds +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} X(t,s)f(s)ds + \sum_{n(t_0)\le k<n(t)} \beta_k X(t,t_k+0)\,.$$

Теорему доведено.

Висновки. В статті розглянуто динамічну модель розвитку підприємства в умовах кредитування та при дії короткотривалих зовнішніх впливів на виробництво, побудовано функціонально-диференціальне рівняння з імпульсною дією та змінним запізненням, яке описує дану модель. На основі фундаментальної функції $X(t,s)$ побудовано розв’язок імпульсного рівняння зі змінним запізненням.

Отримані результати будуть застосовані в подальших дослідженнях для встановлення умов асимптотичної стійкості тривіального розв’язку рівняння (12) на основі припущення про виконання умов Перона для рівняння (8).

Література

1. *Самойленко А .М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К.: Вища школа, 1987. — 288 с.
2. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive Differential Equations. — World Scientific, Singapore, 1995. — 462 p.
3. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications. — Longman, Harlow. — 1993. — 245 p.
4. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Systems with Impulse Effect. — Ellis Horwood, Chichester. — 1989. — 256 p.
5. *Gopalsamy K., Zhang B. G.* On delay differential equations with impulses // J. Math. Anal. Appl. — 1989. — Vol. 139, № 1, — P. 110 — 122.
6. *Lakshmikantham V., Bainov D. D. Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. — Singapure: World Scientific, 1989. — 273 p.
7. *Беллман Р., Кук Л. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир. — 1967. — 548 с.
8. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир. — 1984. — 425 с.
9. *Akhmet M. U., Alzabut J., Zafer A.* Perron’s theorem for linear impulsive differential equations with distributed delay// Journal of Computational and Applied Mathematics — 2006. — 193. — P. 204—218.
10. *Ахтямов А. М.* Математика для социологов и экономистов: учеб. пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ. — 2004. — 464 с.
11. *Егорова Н. Е., Хачатрян С. Р., Маренный М. А.* Дифференциальный анализ развития малых предприятий, использующих кредитно-инвестиционный ресурс // Аудит и финансовый анализ. — 2000. — № 4 — С. 444—458.

Статтю подано до редакції 23.05.11 р.