УДК 330.43:336.01

Т. М. Заболоцький, канд. екон. наук,
старш. наук. співроб. наукової лабораторії,
доц. кафедри комп'ютерних технологій,
Львівський інститут банківської справи
Університету банківської справи
Національного банку України (м. Київ)

СПІЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ ДОХІДНОСТІ ТА ДИСПЕРСІЇ ПОРТФЕЛЯ АКЦІЙ З НАЙМЕНШИМ РІВНЕМ VAR

АНОТАЦІЯ. У роботі досліджено взаємозв'язок між оцінками дохідності та дисперсії портфеля акцій з найменшим рівнем VaR. Знайдено умовну спільну густину та показано, що вибрані оцінки характеристик не є незалежними. Крім того, представлено метод побудови спільної множини довіри.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. Міра ризику, дисперсія, Value-at-Risk, портфель акції з найменшим рівнем Value-at-Risk, дохідність акції.

АННОТАЦИЯ. В работе исследовано взаимосвязь между оценками доходности и дисперсии портфеля акций с наименьшим уровнем VaR. Найдено условную общую плотность распределения и показано что выбранные оценки характеристик не являются независимыми. Кроме этого представлено метод построения общего множества доверия.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Мера риска, дисперсия, Value-at-Risk, портфель акций с наименьшим уровнем Value-at-Risk, доходность акции.

ABSTRACT. The dependence properties of the return and variance estimators of the minimum VaR asset portfolio characteristics are considered. The conditional joint density is derived and it is shown that these estimators of portfolio characteristics are dependent. Moreover the method of joint confidence region constructing is presented.

KEYWORDS. Risk measure, variance, Value-at-Risk, minimum VaR asset portfolio, asset returns.

1. Вступ

При побудові портфеля акцій основна увага приділяється таким його характеристикам, як дохідність і ризик. Зауважимо, що поняття дохідності не викликає питань, на відміну від ризику. В зв'язку з цим, основною проблемою є вибір міри ризику. Очевидно, що інвестор прагне вкладати свої кошти лише в оптимальні, в певному розумінні, портфелі. Для цього йому необхідно спочатку сформулювати критерій оптимальності, якому він віддає перевагу. Всі критерії оптимальності можна поділити на три класи:

максимізація прибутку, мінімізація ризику, досягнення певного співвідношення між прибутком і ризиком. Зазначимо, що у всіх трьох критеріях ризик відіграє важливу роль і для формування портфеля важливим є аналіз дохідності його компонентів. Так, наприклад, дохідність акції в момент часу t, X_t, можна визначити з формули:

$$X_t = 100 \ln \frac{P_t}{P_{t-1}},$$

де через P_t позначено ціну акції в момент часу t.

Вперше дане питання було розглянуте Марковіцем у 1952. В своїй роботі [1] автор, за припущення, що дохідності компонент портфеля є незалежними в часі та нормально розподіленими, досліджує проблему побудови портфеля акцій на основі критеріїв максимуму дохідності та мінімуму ризику. За ризик вибирається дисперсія портфеля. Особливої уваги заслуговує портфель з найменшою дисперсією. Якщо розглянути у просторі дохідність-дисперсія ефективну множину портфелів, тобто портфелів для яких не можна збільшити дохідність не збільшуючи ризик, яка є параболою, то портфель Марковіца буде її вершиною.

Є також інші міри для побудови оптимального портфеля, наприклад, відношення Шарпа, розглянуте в роботах [2—4] та очікувана корисність, застосована для побудови портфеля в роботах [5—6]. Проте, банківська практика та економічна теорія не дають однозначної відповіді на проблему вибору міри ризику. Існує доволі багато мір для опису ризику. В даній роботі для опису ризику портфеля акцій вибрано Value-at-Risk (надалі *VaR*). Дана міра рекомендована Базельським комітетом для оцінки ризиків банківської діяльності [7]. За критерій оптимальності вибрано мінімізацію ризику портфеля. Зауважимо, що характеристики портфеля залежать від параметрів розподілу дохідності його компонент, а саме від математичного сподівання та дисперсії, які на практиці є невідомими. Отже, для чисельного представлення дохідності та ризику портфеля, необхідно спочатку оцінити параметри розподілу дохідності акцій. Очевидно, що використовуючи історичний метод побудови оцінок ми отримаємо в результаті випадкові величини. Враховуючи це, випадковими величинами будуть і оцінки характеристик портфеля. Тому, необхідно розглядати портфель як випадкову величину. Як відомо, основними характеристиками випадкової величини є математичне сподівання та дисперсія, незважаючи на те, що за міру ризику вибрано *VaR*. Отже, **метою даної**

роботи є встановлення спільного розподілу оцінок дохідності та дисперсії портфеля акцій з найменшим рівнем *VaR*. Даний розподіл дозволить провести повний аналіз цих двох випадкових величин та у випадку необхідності встановити ступінь залежності (не лише лінійної) між ними.

2. Оцінки характеристик оптимального портфеля акцій з найменшим рівнем VaR

У даному дослідженні припускається, що дохідності акцій є нормально розподілені та незалежні в часі. Зауважимо, що дане припущення в останні десятиліття зазнає нищівної критики в фінансовій літературі оскільки розподілам дохідностей притаманні важкі хвости та спостерігається певна автокореляція дохідностей. Проте як зазначено в роботі [8], при добрій диверсифікації портфеля, важкі хвости не мають істотного впливу на поведінку характеристик портфеля. Крім того, дослідження проведені автором показують, що автокореляції дохідностей не є істотними. Отже, нехай ми формуємо портфель з k акцій. Позначимо через $\boldsymbol{X}_t = (X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{kt})'$ k-вимірний вектор дохідностей. Частку i-ого цінного паперу в портфелі позначимо через w_i, а портфель — вектор часток $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_k)'$. Припустимо, що вектор $\boldsymbol{X}_t$ є k-вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Тоді дохідність портфелю з вектором ваг $\mathbf{w}$ обчислюємо з наступної формули $X_{\mathbf{w}}=\sum_{i=1}^{t} \mathrm{X}_{it}\, w_i = \mathbf{X}_\mathbf{t}'\mathbf{w}$, математичне сподівання дохідності портфелю або очікувану дохідність — $R_{\mathbf{w}}=\mathrm{E}(\mathrm{X}_{\mathbf{w}})=\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}$, а дисперсію $V_{\mathbf{w}} = D(\mathrm{X}_{\mathbf{w}})=\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$. *VaR* портфеля при рівні довіри α є такий рівень дохідності, що

$$P\{X_{\mathbf{w}} < -VaR_{\alpha}\} = 1-\alpha . \qquad (1)$$

У роботі [9] розглянуто задачу мінімізації *VaR* портфеля при рівні довіри α та отримано наступні ваги

$$\mathbf{w}_{VaR} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_{\alpha}^{2} - s}}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}\, , \qquad (2)$$

де

$$\mathbf{w}_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}{\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}},\ V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}},\ \mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{i}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}},\ s = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$$

та $z_\alpha^2 = -\Phi^{-1}(1-\alpha)$ є α квантилю стандартного нормального розподілу, а $\boldsymbol{i}$ — k-вимірним вектором, елементами якого є одиниці. Варто зауважити, що $\mathbf{w}_{GMV}$ є вектором ваг портфелю з найменшою дисперсією, а V_{GMV} — його дисперсією. Очікувана дохідність і дисперсія даного портфелю мають вигляд:

$$R_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR}\boldsymbol{\mu} = R_{GMV} + \frac{s}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\sqrt{V_{GMV}}, \tag{3}$$

$$V_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{VaR} = \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s}V_{GMV}, \tag{4}$$

де R_{GMV} — очікувана дохідність портфеля найменшої дисперсії. Як сказано вище, параметри розподілу дохідності акцій $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ є невідомими на практиці величинами. Отже, необхідно певним чином оцінити невідомі параметри у формулах (2)—(4). Існують різні методи оцінки параметрів розподілу в статистиці, проте одним з найвідоміших методів є історичний. Використовуючи поведінку випадкової величини в минулому, ми на основі цих спостережень оцінюємо її параметри. Припустимо, що нам відома вибірка попередніх значень векторів дохідностей акцій $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2,\ldots\boldsymbol{X}_n$. На основі цієї вибірки ми будуємо так звані вибіркові оцінки невідомих параметрів, тобто

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i, \quad \hat{\Sigma} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i - \hat{\mu})(\mathbf{X}_i - \hat{\mu})'. \tag{5}$$

Підставляючи замість невідомих параметрів оцінки (5) у формули (2)—(4), а також у вирази для $\mathbf{w}_{GMV}$, V_{GMV}, $\boldsymbol{R}$ та s, отримаємо оцінки ваг портфелю з найменшим рівнем *VaR* і його характеристик, які позначимо $\hat{w}_{VaR}$, $\hat{R}_{VaR}$ та $\hat{V}_{VaR}$. Очевидно так побудовані оцінки є випадковими величинами. Звернемо увагу на знаменник дробу другого доданку правої частини формул (2) та (3), який у загальному випадку може бути невизначеним при підстановці в цей дріб замість параметра s його оцінки $\hat{s}$, оскільки умова

$$\hat{s} < z_\alpha^2 \tag{6}$$

може не виконуватися. Докладний аналіз умови (6) наведено в роботі [10]. У цій роботі автором показано, що випадкова величина $\hat{s}$ приймає значення більші ніж z_α^2 з додатною імовірністю, а тому розглядати безумовний розподіл випадкового вектора $\left(\hat{R}_{VaR}, \hat{V}_{VaR}\right)'$ є взагалі кажучи некоректно, оскільки з додатною імовірність даний вектор є невизначеним. Тому доцільніше розглядати розподіл випадкового вектора $\left(\hat{R}_{VaR}, \hat{V}_{VaR}\right)'$ за умови, що $\hat{s} < z_\alpha^2$, тобто, що виконується умова (6). Для спрощення подальшої викладки позначимо $\hat{R}^*_{VaR} = (\hat{R}_{VaR} \mid \hat{s} = s^*)$, $\hat{V}^*_{VaR} = (\hat{V}_{VaR} \mid \hat{s} = s^*)$, та знайдемо спочатку розподіл випадкового вектора $\left(\hat{R}^*_{VaR}, \hat{V}^*_{VaR}\right)'$.

Теорема 1. Нехай $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$, …, $\boldsymbol{X_n}$ є незалежними випадковими векторами та $\boldsymbol{X_i} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Припустимо, що $\boldsymbol{\Sigma}$ є додатно визначена і $n > k$. Тоді:

$$f_{\hat{R}^*_{VaR}, \hat{V}^*_{VaR}}(x_1, x_2) = \frac{(n-1)\left(z_\alpha^2 - s^*\right)}{V_{GMV} z_\alpha^2 \sqrt{\frac{1 + s^* n/(n-1)}{n} V_{GMV}}} f_{n-k}\left(\frac{(n-1)x_2\left(z_\alpha^2 - s^*\right)}{V_{GMV} z_\alpha^2}\right) \times$$

$$\times \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1 + s^* n/(n-1)}{n} V_{GMV}}}\left(x_1 - R_{GMV} - \frac{s^* \sqrt{x_2}}{z_\alpha}\right)\right), \qquad (7)$$

де $\varphi(x)$ густина стандартного нормального розподілу, $f_{n-k}(x)$ густина випадкової величини з χ^2 розподілом з n-k ступенями вільності.

Доведення. В роботі [11] у теоремі 1 наведено стохастичне представлення випадкових величин $\hat{R}^*_{VaR}$, $\hat{V}^*_{VaR}$

$$\begin{cases} \hat{R}^*_{VaR} = R_{GMV} + \sqrt{\tilde{s}^*}\,\xi_1 + a(s^*)\sqrt{\xi_2} \\ \hat{V}^*_{VaR} = b(s^*)\xi_2 \end{cases}, \qquad (8)$$

де випадкові величини $\xi_1 \sim N(0,1)$ та $\xi_2 \sim \chi^2_{n-k}$ є незалежними та

$$a(s^*) = \frac{s^*}{\sqrt{z_\alpha^2 - s^*}}\sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}}, \quad b(s^*) = \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s^*}\frac{V_{GMV}}{n-1}, \quad \tilde{s}^* = \frac{1 + n/(n-1)s^*}{n}V_{GMV}.$$

Розв'язавши систему (8) відносно ξ_1 та ξ_2 отримаємо

$$\begin{cases} \xi_2 = \dfrac{1}{b(s^*)}\hat{V}^*_{VaR} \\ \xi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\tilde{s}^*}}\left(\hat{v}^*_{VaR} - R_{GMV} - a(s^*)\sqrt{\dfrac{\hat{V}^*_{VaR}}{b(s^*)}}\right) \end{cases}.$$

Отже, Якобіан переходу від змінних $\left(\hat{R}^*_{VaR}, \hat{V}^*_{VaR}\right)$ до (ξ_1, ξ_2) має вигляд

$$\left|\Im\left(\frac{(\xi_1,\xi_2)}{\left(\hat{R}^*_{VaR}, \hat{V}^*_{VaR}\right)}\right)\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \hat{R}^*_{VaR}} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \hat{V}^*_{VaR}} \\ \dfrac{\partial \xi_2}{\partial \hat{R}^*_{VaR}} & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial \hat{V}^*_{VaR}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{\tilde{s}^*}} & -\dfrac{a(s^*)}{2\sqrt{\hat{V}^*_{VaR}\, b(s^*)\tilde{s}^*}} \\ 0 & \dfrac{1}{b(s^*)} \end{vmatrix} = \frac{1}{b(s^*)\sqrt{\tilde{s}^*}}.$$

Тому спільна густина $\hat{R}^*_{VaR}$, $\hat{V}^*_{VaR}$ має вигляд

$$f_{\hat{R}^*_{VaR}, \hat{V}^*_{VaR}}(x_1, x_2) = \frac{1}{b(s^*)\sqrt{\tilde{s}^*}} f_{n-k}\left(\frac{x_2}{b(s^*)}\right)\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{s}^*}}\left(x_1 - R_{GMV} - a(s^*)\sqrt{\frac{x_2}{b(s^*)}}\right)\right).$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що в теоремі 1 знайдено спільний розподіл випадкових величин $\hat{R}_{VaR}$, $\hat{V}_{VaR}$ за умови, що $\hat{s} = s^*$, тобто, що значення оцінки $\hat{s}$ є відомим. Проте, на практиці, неможливо визначити значення оцінки наперед. Тому нас цікавить більш загальний результат, а саме спільний розподіл випадкових величин $\hat{R}_{VaR}$, $\hat{V}_{VaR}$ за умови, що $\hat{s} < z_\alpha^2$. Цей розподіл знайдено в теоремі 2.

Теорема 2. Нехай $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$, …, $\boldsymbol{X_n}$ є незалежними випадковими векторами та $\boldsymbol{X_i} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Припустимо, що $\boldsymbol{\Sigma}$ є додатно визначена і $n > k$. Тоді:

$$f_{\hat{R}_{VaR}, \hat{V}_{VaR} | \hat{s} < z_\alpha^2}(x_1, x_2) = K(z_\alpha^2) \int_0^{z_\alpha^2} f_{k-1, n-k+1; ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^*\right) f_{\hat{R}^*_{VaR}, \hat{V}^*_{VaR}}(x_1, x_2 | s^*) ds^*, \quad (9)$$

де $K(x) = \dfrac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \dfrac{1}{F_{k-1, n-k+1; ns}\left(\dfrac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} x\right)}$, $F_{d_1, d_2; \lambda}(x)$ та $f_{d_1, d_2; \lambda}(x)$ є відповідно функція розподілу та густина нецентрального розподілу Фішера з d_1 і d_2 ступенями свободи та нецентральним параметром λ.

Доведення. Доведення теореми 2 випливає з наступної леми, доведення якої наведено в роботі [11].

Лема 1. Нехай *X* та *Y* є абсолютно неперервні випадкові величини з густинами $f_X(\cdot)$ та $f_Y(\cdot)$ відповідно. Тоді:

$$f_{X | Y \le y}(x | y) = \frac{1}{F_Y(y)} \int_{-\infty}^{y} f_{X | Y = t}(x | t) f_Y(t) dt,$$

де $F_Y(\cdot)$ є функцією розподілу випадкової величини *Y*.

Теорему доведено.

В загальному випадку спільний розподіл випадкового вектора є достатньою умовою не лише для проведення повного статистичного аналізу, але і для тестування гіпотез. Так, наприклад, використовуючи умовний спільний розподіл випадкового вектора $\left(\hat{R}_{VaR}, \hat{V}_{VaR}\right)'$, за умови, що $\hat{s} < z_\alpha^2$ ми можемо протестувати наступну гіпотезу

$$H_0: R_{VaR} = r \text{ і } V_{VaR} = v \text{ проти } H_1: R_{VaR} \neq r \text{ або } V_{VaR} \neq v. \quad (10)$$

Проте, на практиці, дана задача не є простою навіть використовуючи сучасні комп'ютерні статистичні програми. Ця проблема виникає тому, що розподіл вектора не є загально відомим. Тому для проведення перевірки гіпотези (10) у даній статті запропоновано використання спільної множини довіри для вектора $(R_{VaR}, V_{VaR})'$.

3. Спільна множина довіри для дохідності та дисперсії портфеля акцій з найменшим рівнем VaR

Даний розділ присвячено побудові спільної множини довіри з рівнем довіри $1-\beta$ для вектора $(R_{VaR}, V_{VaR})'$. Позначимо $\tilde{\beta} = 1-\sqrt[3]{1-\beta}$ та для спрощення подальших викладок введемо наступні позначення

$$g_1(s,v) = \hat{R}_{GMV} + \left(s - \sqrt{v-s}\, z_{1-\tilde{\beta}/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}} \right) \sqrt{\frac{V}{v}},$$

$$g_2(s,v) = \hat{R}_{GMV} + \left(s + \sqrt{v-s}\, z_{1-\tilde{\beta}/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}} \right) \sqrt{\frac{V}{v}},$$

$$r_l = v\left(1 - \frac{1}{V} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;\tilde{\beta}/2}} \right),$$

$$r_u = v\left(1 - \frac{1}{V} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}} \right),$$

$$s_u^*(v) = v - \frac{z^2_{1-\tilde{\beta}/2}}{4} \left(\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1} \right).$$

Також позначимо через s_l та s_u нижню та верхню межу $1-\tilde{\beta}$ інтервалу довіри для параметра s обчисленого на основі рекурсивної процедури в роботі [12].

Теорема 3. Нехай $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$, …, $\boldsymbol{X_n}$ є незалежними випадковими векторами та $\boldsymbol{X_i} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Припустимо, що $\boldsymbol{\Sigma}$ є додатно визначена і $n>k$. Тоді $1-\beta$ спільна множина довіри для $(R_{VaR}, V_{VaR})'$ дорівнює множині, яка складається з усіх пар точок (R, V), які задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} R \ge g_1\left(\max\left\{ s_l, r_l(z_\alpha^2) \right\}, z_\alpha^2 \right) \\ R \le g_2\left(\max\left\{ s_l, r_l(z_\alpha^2) \right\}, z_\alpha^2 \right), \text{при } s_u^*\left(z_\alpha^2 \right) \le \max\left\{ s_l, r_l(z_\alpha^2) \right\} \\ R \le g_2(s_u^*\left(z_\alpha^2 \right), z_\alpha^2), \qquad \text{при } \max\left\{ s_l, r_l(z_\alpha^2) \right\} < s_u^*\left(z_\alpha^2 \right) \le \min\left\{ s_u, r_u(z_\alpha^2) \right\} \\ R \le g_2\left(\min\left\{ s_u, r_u(z_\alpha^2) \right\}, z_\alpha^2 \right), \text{при } s_u^*\left(z_\alpha^2 \right) > \min\left\{ s_u, r_u(z_\alpha^2) \right\} \end{cases}$$

та $V \in \left[\frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s_l} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}} ; \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s_u} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;\tilde{\beta}/2}} \right]$.

Доведення. Для доведення цієї теореми використаємо результат роботи [12], а саме спільну множину довіри для *(R_{GMV}, V_{GMV}, s)'*, яка має вигляд

$$\hat{R}_{GMV} - z_{1-\tilde{\beta}/2}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}}\sqrt{V_{GMV}} \le R_{GMV} \le \hat{R}_{GMV} + z_{1-\tilde{\beta}/2}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}}\sqrt{V_{GMV}}\,, \tag{11}$$

$$\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}} \le V_{GMV} \le \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;\tilde{\beta}/2}}\,, \tag{12}$$

$$s_l \le s \le s_u\,. \tag{13}$$

Розв'язавши рівняння (3)—(4) відносно *(R_{GMV}, V_{GMV})'* та підставивши отримані рівності в (11)—(12) отримаємо

$$\begin{aligned} \hat{R}_{GMV} + \left(s - \sqrt{z_\alpha^2 - s}\, z_{1-\tilde{\beta}/2}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}} \right)\frac{\sqrt{V_{VaR}}}{z_\alpha} \le R_{VaR} \le \\ \le \hat{R}_{GMV} + \left(s + \sqrt{z_\alpha^2 - s}\, z_{1-\tilde{\beta}/2}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}} \right)\frac{\sqrt{V_{VaR}}}{z_\alpha} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\frac{z_\alpha^2}{\left(z_\alpha^2 - s\right)} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}} \le V_{VaR} \le \frac{z_\alpha^2}{\left(z_\alpha^2 - s\right)} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;\tilde{\beta}/2}}\,, \tag{15}$$

$$s_l \le s \le s_u\,. \tag{16}$$

Зауважимо, що формули (14)—(15) задають спільну множину довіри для *(R_{VaR}, V_{VaR})'* при заданому значенні *s*, що задовольняє нерівність (16). Для того, щоб позбутися залежності від *s* нам необхідно обчислити об'єднання інтервалів (14)—(15) по $s \in [s_l, s_u]$. З нерівності (15) при заданому значенні V_{VaR} можливі значення для *s* задаються наступним інтервалом

$$\frac{z_\alpha^2}{V_{VaR}} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}} \le z_\alpha^2 - s \le \frac{z_\alpha^2}{V_{VaR}} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;\tilde{\beta}/2}}$$

або

$$z_\alpha^2\left(1-\frac{1}{V_{VaR}}\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;\tilde{\beta}/2}}\right)\le s\le z_\alpha^2\left(1-\frac{1}{V_{VaR}}\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}}\right). \qquad (17)$$

З нерівностей (16)—(17) при сталому значенні V_{VaR} отримаємо

$$\Omega_{VaR}=\left\{s\in R \mid \max\left\{s_l, r_l\left(z_\alpha^2\right)\right\}\le s\le \min\left\{s_u, r_u\left(z_\alpha^2\right)\right\}\right\}$$

множину допустимих значень s.

Тепер для обчислення нижньої та верхньої меж інтервалу для R_{VaR} при сталому значенні V_{VaR} нам необхідно мінімізувати $g_1(s,z_\alpha^2)$ та максимізувати $g_2(s,z_\alpha^2)$ по $s\in\Omega_{VaR}$ відповідно.

Розглянемо спочатку задачу мінімізації, тобто

$g_1(s,z_\alpha)\to\min$ за умови $s\in\Omega_{VaR}$.

Похідна від $g_1(s,z_\alpha^2)$ по s становить

$$\frac{\partial g_1(s,z_\alpha^2)}{\partial s}=\frac{\sqrt{V_{VaR}}}{z_\alpha}\left(1+\frac{z_{1-\tilde{\beta}/2}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\hat{s}}{n-1}}}{2\sqrt{z_\alpha^2-s}}\right)>0$$

для всіх $s\in\Omega_{VaR}$. Отже, мінімуму функція $g_1(s,z_\alpha^2)$ досягає на нижній межі множини Ω_{VaR}. Тому нижня межа для R_{VaR} становить

$$R_{VaR}\ge g_1(\max\left\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\right\}, z_\alpha^2) \qquad (18)$$

при $\dfrac{z_\alpha^2}{\left(z_\alpha^2-s\right)}\dfrac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}}\le V_{VaR}\le\dfrac{z_\alpha^2}{\left(z_\alpha^2-s\right)}\dfrac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;\tilde{\beta}/2}}$.

Далі потрібно розв'язати наступну проблему $g_2(s,z_\alpha)\to\max$ за умови $s\in\Omega_{VaR}$.

Обчислимо спочатку першу похідну від функції $g_2(s,z_\alpha^2)$ по s та прирівняємо її до 0.

$$\frac{\partial g_2(s,z_\alpha^2)}{\partial s}=\frac{\sqrt{V_{VaR}}}{z_\alpha}\left(1-\frac{z_{1-\tilde{\beta}/2}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\hat{s}}{n-1}}}{2\sqrt{z_\alpha^2-s}}\right)=0\,. \qquad (19)$$

Розв’язавши рівняння (19) відносно s отримаємо

$$\overset{*}{s}_u(z_\alpha^2)=z_\alpha^2-\frac{z_{1-\tilde{\beta}/2}^2}{4}\left(\frac{1}{n}+\frac{\hat{s}}{n-1}\right).$$

Оскільки друга похідна функції $g_2(s,z_\alpha^2)$ по s завжди менша за 0, тобто

$$\frac{\partial^2 g_2(s,z_\alpha^2)}{\partial s^2}=-\frac{z_{1-\tilde{\beta}/2}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\hat{s}}{n-1}}}{4\left(z_\alpha^2-s\right)^{3/2}}\frac{\sqrt{V_{VaR}}}{z_\alpha}<0\,,$$

то свого максимуму функція $g_2(s,z_\alpha^2)$ досягає в точці $\overset{*}{s}_u(z_\alpha^2)$. Враховуючи, що допустимі значення $s\in\Omega_{VaR}$, отримаємо

$$\begin{cases} R_{VaR}\le g_2\left(\max\left\{s_l,r_l(z_\alpha^2)\right\},z_\alpha^2\right), \text{при } \overset{*}{s}_u\left(z_\alpha^2\right)\le\max\left\{s_l,r_l(z_\alpha^2)\right\} \\ R_{VaR}\le g_2(\overset{*}{s}_u\left(z_\alpha^2\right),z_\alpha^2), \qquad \text{при } \max\left\{s_l,r_l(z_\alpha^2)\right\}<\overset{*}{s}_u\left(z_\alpha^2\right)\le\min\left\{s_u,r_u(z_\alpha^2)\right\} \\ R_{VaR}\le g_2\left(\min\left\{s_u,r_u(z_\alpha^2)\right\},z_\alpha^2\right), \text{при } \overset{*}{s}_u\left(z_\alpha^2\right)>\min\left\{s_u,r_u(z_\alpha^2)\right\} \end{cases}. \qquad (20)$$

при $\dfrac{z_\alpha^2}{\left(z_\alpha^2-s\right)}\dfrac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}}\le V_{VaR}\le\dfrac{z_\alpha^2}{\left(z_\alpha^2-s\right)}\dfrac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi^2_{n-k;\tilde{\beta}/2}}$.

Склавши разом (18) і (20) отримаємо твердження теореми.

Результат теореми 3 істотно спрощує перевірку гіпотези (10). Так, для тестування (10) достатньо перевірити чи належать значення *(r, v)* спільній множині довіри для (R_{VaR}, V_{VaR})' отриманій у теоремі 3 чи ні. Якщо задані значення множині не належать, то нульову гіпотезу відхиляємо, тобто отримаємо, що задані значення істотно відрізняються від отриманих.

4. Висновки

Дана робота присвячена дослідженню характеристик портфеля акцій з найменшим рівнем *VaR*. Оскільки ваги портфеля залежать від параметрів розподілу дохідностей акцій, то ми в своїй роботі оперуємо не константами, а випадковими величинами. В статті знайдено спільну густину розподілу оцінок сподіваної дохідності та дисперсії портфеля. Це дає нам змогу провести повний статистичний аналіз оцінок характеристик портфеля, а отже і самого портфеля. Крім цього, спільний розподіл дозволяє на основі тесту (10) перевірити чи істотно відрізняються значення дохідності та дисперсії портфеля, що спостерігаються на практиці від значень, які інвестор волів би отримати. Проте, виявляється використання спільної густини на практиці є доволі складним завданням, оскільки густина не є загальновідомою. В роботі запропоновано простіший алгоритм перевірки гіпотези (10). Для цього було побудовано спільну множину довіри для пари дохідність-дисперсія. Тепер перевірка гіпотези є еквівалентною перевірці чи попадають значення задані інвестором в цю множину довіри чи ні. Якщо значення не попадають, то з певним рівнем довіри можна стверджувати, що справжня дохідність або дисперсія портфеля істотно відрізняється від необхідних значень.

Література

1. *Markowitz H.* Portfolio selection // Journal of finance. — 1952. — № 7. — P. 77—91.
2. *Sharpe W. F.* The Sharpe ratio // Journal of portfolio management. — 1994. — P. 49—58.
3. *Okhrin Y., Schmid W.* Distributional properties of optimal portfolio weights // Journal of econometrics. — 2006. — № 134. — P. 235—256.
4. *Schmid W., Zabolotskyy T.* On the existence of unbiased estimators for the portfolio weights obtained by maximizing the Sharpe ratio // ASTA — Advances in statistical analysis. — 2008. — № 92. — P. 29—34.
5. *Bodnar T., Schmid W., Zabolotskyy T.* Statistical inference of the efficient frontier for dependent asset returns // Statistical papers. — 2008. — № 50. — P. 593—604.
6. *Bodnar T., Schmid W., Zabolotskyy T.* Sample efficient frontier in multivariate conditionally heteroscedastic elliptical models // Statistics. — 2010. — V

http://www.informaworld.com/smpp/title~db=all~content=t713682269~tab=issueslist~branches=44 — v4444, Issue 1. — P. 1—15.

7. Basel Committee on Banking Supervision // Operational Risk Consultative Document, Supporting document to the New Basel Capital Accord. — January 2001. — 30 p.

8. *Duffie D., Pan J.* An overview of Value-at-Risk // Journal of derivatives. — 1997. — P. 7—49.

9. *Alexander G. J., Baptista M. A*. Economic implication of using a mean-VaR model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis // Journal of economic dynamics & control. — 2002. — № 26. — P. 1159—1193.

10. *Заболоцький Т.* Оцінка ваг валютного портфелю з найменшим рівнем VaR // Вісник НБУ. — 2011. — № 8. — С. 31—33.

11. *Заболоцький Т.* Розподіл характеристик портфелю акцій з найменшим рівнем VaR // Моделювання та інформаційні системи в економіці. — 2011. — № 85. — С. 165—178.

12. *Bodnar T., Schmid W.* Econometrical analysis of the sample efficient frontier // The European Journal of Finance. — 2009. — № 15. — P. 317—335.

Стаття надійшла до редакції 14.06.2012 р.

УДК. 167.23 : 336.764.2

С. О. Силантьєв, канд. техн. наук,
доцент кафедри менеджменту,
ДВНЗ «Київський національний економічний
університет імені Вадима Гетьмана»

КАЛІБРУВАННЯ СТОХАСТИЧНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ПОХІДНИХ ФІНАНСОВИХ ІНСТРУМЕНТІВ

АНОТАЦІЯ. Запропоновано метод калібрування дерева ціноутворення акцій компанії Apple з використанням імпліцитної стохастичної волатильності і наявних ринкових цін на серії опціонів CALL з експірацією у 2012 році. Метод надає можливість визначення цін на екзотичні (бермудські) опціони з нестандартними страйками. Визначені ціни CALL опціонів, виписаних 2 грудня 2011 року з експірацією 8 березня і 1 квітня 2012 року.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: Похідні фінансові інструменти, імпліцитна волатильність, калібрування, стохастична волатильність

АННОТАЦИЯ. Предложен метод калибрации дерева ценообразования акций компании Apple с использованием имплицитной стохастичной волатильности и доступных риночных цен на серии опционов CALL, которые експирируют в 2012 году. Метод даёт возможность определения цен на экзотические (бермудские) опционы с нестандартними страйка-