Література

1. *Зайцев І. С., Зайцева Н. М.* Динамічні моделі управління ресурсними потоками крупного металургійного підприємства // Модели управления в рыночной экономике: Сб. науч. тр. Общ. ред. и предисл. Ю. Г. Лысенко; Донецкий нац. ун-т. — Донецк: ДонНУ, 2007. — Вып. 10. — 324 с.
2. *Бланк И. А.* Управление активами. — К.: Ника-Центр; Эльга, 2002. — 717 с.
3. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближеннях решений. — М.: Издательство «Мир», 1976. — 167 с.

Статтю подано до редакції 06.04.10 р.

УДК 330:51

Ю. В. Коляда, докторант кафедри економіко-математичного моделювання,
ДВНЗ «Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»

ФАЗОВІ ТА ПАРАМЕТРИЧНІ ПОРТРЕТИ КЛЮЧОВИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ НЕЛІНІЙНОЇ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

АНОТАЦІЯ. Для низки математичних моделей (ММ), що відносяться до числа ключових у комп'ютерному моделюванні динаміки економічних систем, розроблено методику якісного дослідження, результати якого відображаються не тільки фазовими портретами. Привертається увага до так званих параметричних портретів: як відомо, саме коефіцієнтами ММ детермінуються різноманітні режими протікання економічних процесів. Через довільні комбінації ключових моделей, тобто взаємодії їх фазових і параметричних портретів, проявляється хитросплетіння економічних подій та сценарії їх розвитку.

ANNOTATION. The qualitative research methodology has been created for a number of mathematical models (MM), which are among the key dynamics models in computer simulation of economic systems. Some results of this methodology are shown here not only on the phase portraits. Attention is given to the so-called parametric portraits: as you know, the MM coefficients determine different flow regimes of economic processes. Throught some random combination of key models, i.e. interaction of their parametric and phase portraits were shown scenes of economic events and scenarios of models development.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нелінійна динаміка, математичні моделі, фазовий і параметричний портрет.

Вступ. Економіка відноситься до числа надскладних систем, що неупинно розвиваються та самоорганізовуються, формалізований і адекватний розвиток котрої на сьогодні недостатній. Разом з тим, вона категорично не входить до переліку тих систем, при моделюванні яких, починаючи з деякого рівня складності, простіше виготовити, ніж описати певного класу рівняннями формальної моделі. Вихід із скрутного стану вбачається у об'єднанні формальних методів і техніки якісного аналізу. Саме такий підхід являє сьогодні підвалини більшості моделей і методик системного аналізу [1]. При цьому розповсюджена точка зору щодо традиційних уявлень про моделі та математичне моделювання економіки зазнає кардинальних змін.

Аналіз публікацій. У літературі по синергетичній економіці [2] приводиться досить багато [3, 4] математичних моделей (ММ), якими охвачуються практично всі важливі (з точки зору сьогодення) сторони функціонування соціально-економічних систем. Придивившись пильно до систем звичайних диференціальних рівнянь, що виступають у якості ММ нелінійної динаміки соціально-еокономічних процесів, явищ і ефектів, неважко побачити, що формально вони співпадають з відомими в інших областях знання — моделями математичної біології і біофізики [5, 6]. По суті, це одні і ті ж ММ, лише змінним надана предметна інтерпретація.

Зазначене цілком закономірне, бо об'єктом уваги кожної з вищезгадуваних наукових дисциплін виступає нелінійна, нестаціонарна, нерівноважна система необоротної дії. У такий спосіб яскраво проявляється синергетична теза про холістичність оточуючого нас середовища (незалежно від свого походження системи проявляють однакові характерні риси, іманентно їм притаманні).

Витоки ММ [2—6] знаходяться у знаменитій моделі «жертва—хижак» — системі рівнянь Вольтерра—Лотки [7], яку стосовно економіки можна тлумачити як «ресурс—споживач», «ціна товару—обсяг продкції» тощо.

Постановка проблеми і підходи до її розв'язання. Спершу слід зауважити, що на сьогодні в літературі з економіко-математичного моделювання нелінійної динаміки практично відсутня методика якісного аналізу, має місце [3, 4] лише проголошення проміжних результатів на кшталт матриця Якобі (лінеаризація) та її числові характеристики (слід, визначник, власні числа і вектори). Також фігурують поняття фазових портретів без геометричного їх зображення. Звісно, цього для повноцінного моделювання економіки замало.

Як відомо, труднощі моделювання економіки детермінуються головним чином системним дрейфом економічних чинників, що сприяє почережності фазових портретів — переходу від одного до іншого, тобто біфуркації. Тоді стає зрозумілою провідна роль і призначення так званих параметричних портретів, якими описується залежна від змінюваності коефіцієнтів ММ варіація фазових портретів. По-іншому, йдеться про характерний вплив та альтернативу фазового портрета.

У літературі [8, 9] по теорії математичного моделювання проблем науки і техніки неодноразово ставилось питання про якісний аналіз ММ, що передував би як початковий етап обчислювальному експерименту, тобто кількісному економічному аналізу у нашому випадку. В споріднених областях природознавства, наприклад математична біологія чи біофізика, де об'єкт дослідження являє собою нелінійну, нерівноважну і т. д. систему незворотної дії, такий підхід частково і досить успішно реалізовано [5—7]. Цілком логічно й закономірно згадувані результати, фільтруючи, перенести у сферу економіко-математичного моделювання. Цим самим економістам надається могутній інструмент превентивного аналізу та виваженого і вдумливого погляду на економічне майбуття — сценарії еволюції економіки. Але для цього належить викласти наявні здобутки послідовно і доступно для економічного загалу.

Мета статті полягає у вдумливому перенесенні на економічне підгрунтя і селекції якісних результатів дослідження синергетичних моделей, які є ключовими для математичного моделювання нелінійної економічної динаміки. Послідовний і логічно витриманий, цілком ясний виклад сприятиме створенню методики якісного вивчення економічної дійсності, орієнтуючи у прийнятті виважених рішень.

Виклад основного матеріалу. На сьогодні економіка кваліфікується як надскладна динамічна самоорганізуюча система, зміни у котрій відбуваються не тільки внаслідок зовнішніх діянь (кібернетична точка зору), скільки, в головному, визначаються внутрішніми механізмами і особливостями (синергетичний погляд).

У вивченні сучасної глибоко трансформаційної економіки нині спостерігається значна експансія новітніх математичних методів, не тільки в галузі економічної статистики або оптимізаційних задач, скільки у сферу моделювання нелінійної економічної динаміки. Цю прикметну рису слід визнати як цілком закономірну, зважаючи на давню традицію використання математики від самого початку досліджень у теорії економіки.

Кожна ММ по-своєму якнайкраще висвітлює лише один аспект, грань економіки на підставі сформульованих гіпотез — припущень для побудови моделі. Тут же напрошується думка, що описати найбільш повно економічну структуру суспільства можливо, розглядаючи всю множину наявних ММ. Логічно вимагати, щоб ця множина (банк моделей) була структурована за певними принципами, підпорядковуючись ефективному прямому і швидкісному доступу (вибору або утворенню) потрібної адекватної системи рівнянь. Така принципологія організації банку моделей сприятиме системному (всесторонньому) відображенню надскладних економічних взаємозв'язків і взаємовпливів.

Невизначеність і неповнота інформації щодо економічного об'єкта, наявність у ньому швидкоплинних, повільних і латентних змінних, нестаціонарне функціонування його складових і протікання процесів, присутність нелінійних прямих і зворотніх зв'язків сприяють тому, що в економіці перевага має надаватися якісним результатам дослідження, які в подальшому можуть деталізуватись кількісно.

На думку автора, математичне і комп'ютерне моделювання економіки має застосовуватись на концептах наскрізного адаптивного використання як засобів, так і інструментів здійснення процесу моделювання. Це означає відмову від жорстких структур і форм моделей та алгоритмів їх аналізу, замінюючи гнучкими, тобто адаптивними. Окрім цього, сучасне економіко-математичне моделювання нелінійної динаміки у першій своїй фазі повинно бути якісним, а потім має проводитися обчислювальний експеримент, тобто кількісно відслідковуватись фазові траєкторії.

На наш погляд, при цьому повинно передбачатися виокремлення ключових ММ економічної динаміки, сукупна дія котрих значною мірою відтворює економічну дійсність, її реалії. Дослідження зазначених моделей здійснюється в два етапи — спершу якісний, а потім кількісний аналіз.

Прикладом однієї з ключових ММ виступає система рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - \frac{Bxy}{1+Px} - Ex^2 \\ \dot{y} = -Cy + \frac{Dxy}{1+Px} - Fy^2, \end{cases} \tag{1}$$

якою описується дуопольно-дуопсонієва конкуренція (відображається доданками Ex^2 і Fy^2) з урахуванням насиченого стану (реалізується множником 1/(1+*Px*)). Зауважимо, що для $P = 1$ отримується модель, розглянута [10] кількісним чином (здійснювалось числове інтегрування рівнянь моделі у п'яти важливих для економічної практики ситуаціях). Зазначимо також, що система рівнянь (1) з одного боку є узагальнення класичної моделі «хижак—жертва», а з іншої — динамічна модель Леонтьєва [2]. Між іншим, з ММ (1) випливає багато моделей [3, 4] синергетичної економіки, надаючи коефіцієнтам відповідних числових значень, або вважаючи їх функціями певного виду.

Щоб уникнути семи параметрів (A, B, C, D, E, F, P), здійснюється заміна: $t = \tau/A$; $x = (A/D)U$; $y = (A/B)V$; $\gamma = C/A$; $\alpha = PD/A$; $\varepsilon = E/D$; $\mu = F/B$, у результаті якої отримується так звана безрозмірна система рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{U} = U - \frac{UV}{1+\alpha u} - \varepsilon U^2 \equiv f_1(U,V) \\ \dot{V} = -\gamma V + \frac{UV}{1+\alpha U} - \mu V^2 \equiv f_2(U,V)' \end{cases} \qquad (2)$$

з чотирма параметрами γ, α, μ, ε, причому γ успадкований від класичної ($B = E = F = P = 0$) моделі Вольтерра—Лотки, а три інші визначають розв'язки моделі (2).

І) Спочатку розглянемо збурюючий вплив кожного окремо взятого параметра. Для $\alpha = \varepsilon = 0$ ММ (2) приймає вигляд:

$$\dot{U} = U - UV;\ \dot{V} = -V + UV - \mu V^2. \qquad (2a)$$

Її особливі точки O_1 (0;0) і O_2 ($1 + \mu$;1) знаходяться за умови $\dot{U} = \dot{V} = 0$.

Матриця Якобі (лінеаризації) в нашому випадку записується:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(.)}{\partial U} & \frac{\partial f_1(.)}{\partial V} \\ \frac{\partial f_2(.)}{\partial U} & \frac{\partial f_2(.)}{\partial V} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 - V & -U \\ V & -1 + U - 2\mu V \end{pmatrix}.$$

Вона обчислюється в особливих точках: $J(0;0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Її слід (сума елементів головної діагоналі) $SpJ_1(0;0) = 0$, а $detJ(0;0) = -1 < 0$.

Надалі будемо користуватися діаграмою [11] визначення типу особливих точок моделі (рис. 1).

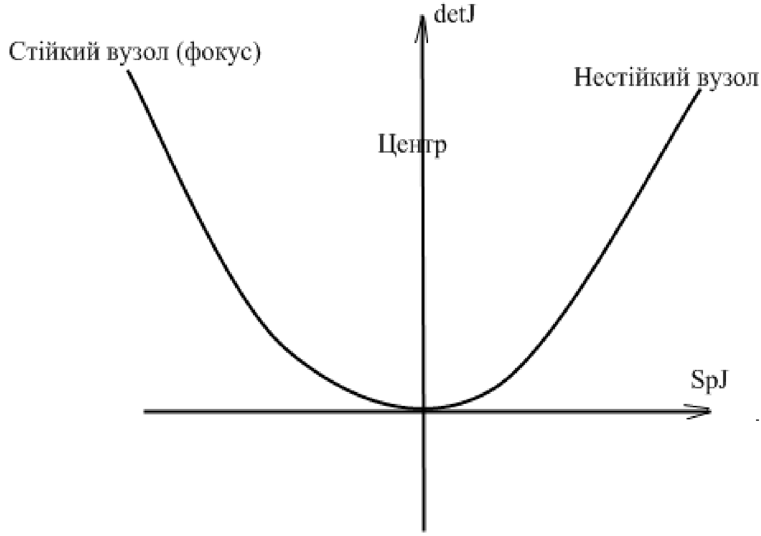


Рис. 1.

Отже, перша особлива точка $O_1(0;0)$ є сідло, оскільки SpJ_1 $(0;0) = 0$, а $detJ(0;0) = -1 < 0$. Для другої особливої точки O_2 $(1 + \mu;1)$ відповідно обчислюється: $SpJ_2 = -\mu < 0$, а $detJ_2 =$ $= (1 + \mu) > 0$.

Згадувана точка стійка для будь-якого μ. Фазовий портрет ММ (2а) зображено на рис. 2.

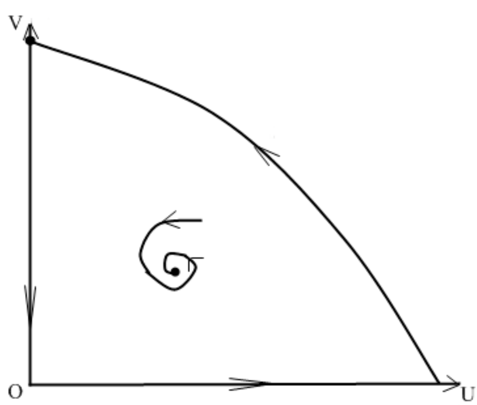


Рис. 2. Фазовий портрет моделі 2а

При α = μ = 0 ММ (2) переписується:

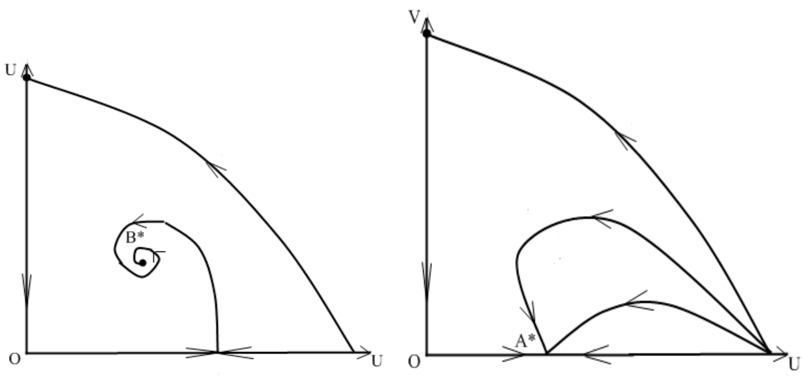
$$\begin{cases} U = U - UV - \varepsilon U^2 \\ \dot{V} = -V + UV \end{cases} \tag{2б}$$

Особливі точки: $O_1(0;0)$ і $O_2(1;1-\varepsilon)$. Дійсно, з другого рівняння моделі випливає $V_1 = 0$; $U_2 = 1$. З першого рівняння $-U(1 - V - \varepsilon U) = 0$ моделі також випливає $V_2 = 1 - \varepsilon$ при $U_2 = 1$ і $V_3 = 0$ для $U_3 = 1/\varepsilon$, тобто $O_3(1/\varepsilon;0)$.

Матриця Якобі J для моделі (2б) має вигляд:

$$J = \begin{pmatrix} 1 - V - 2\varepsilon U & -U \\ V & -1 + U \end{pmatrix}.$$

Її слід для тривіальної особливої точки O_1 рівний нулю, а визначник від'ємний, тобто точка є сідло; для O_2 записується: $SpJ = \overline{U} - \overline{V} - 2\varepsilon\overline{U} \equiv -\varepsilon < 0$; $detJ = -1 + \overline{V} + 2\varepsilon\overline{U} + \overline{U} - 2\varepsilon\overline{U}^2 \equiv 1 - \varepsilon$. На рис. 3 зображено фазові портрети моделі (2 б).



для ε < 1
а

для ε > 1
б

Рис. 3.

Для ε = μ = 0 ММ(2) приймає вигляд:

$$\begin{cases} \dot{U} = U - \frac{UV}{1+\alpha U} \\ \dot{V} = -V + \frac{UV}{1+\alpha U} \end{cases} \tag{2в}$$

Окрім тривіальної $O_1(0;0)$ особливої точки, фігурує $O_2(1/(1 - \alpha);1/1 + \alpha)$: з другого рівняння нуль ізоклини знаходяться

$U_2 = 1/(1-\alpha)$, а з першого – $V_2 = \alpha/(1-\alpha)$. Матриця Якобі для моделі (2в) має вигляд:

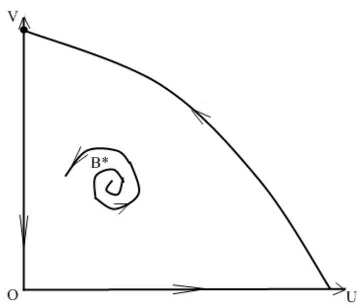
$$J = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{V}{(1+\alpha U)^2}; & -\dfrac{U}{1+\alpha U} \\ \dfrac{V}{(1+\alpha U)^2} & -1 + \dfrac{U}{1+\alpha U} \end{pmatrix}.$$

Її числові характеристики записуються:

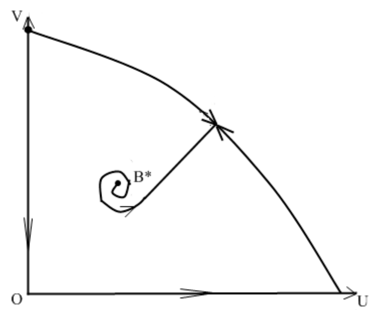
$$SpJ = \frac{U}{1+\alpha U} - \frac{V}{(1+\alpha U)^2};$$

$$detJ = \left(1 - \frac{V}{(1+\alpha U)^2}\right)\left(-1 + \frac{U}{1+\alpha U}\right) + \frac{UV}{(1+\alpha U)^3}.$$

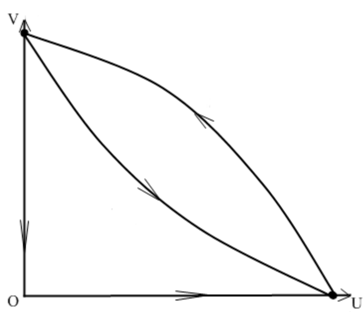
У точці O_2 вони приймають значення: $SpJ_2 = \alpha$ і $SpJ_2 = 1-\alpha$. На рис. 4 зображено фазові портрети моделі (2 в).



α < 0;
а



0 < α < 1;
б



α > 0
в

Рис. 4.

II) ПАРАМЕТРИЧНІ ПОРТРЕТИ. Тепер будуть розглядатися ММ типу (2), але за наявності двох числових параметрів.

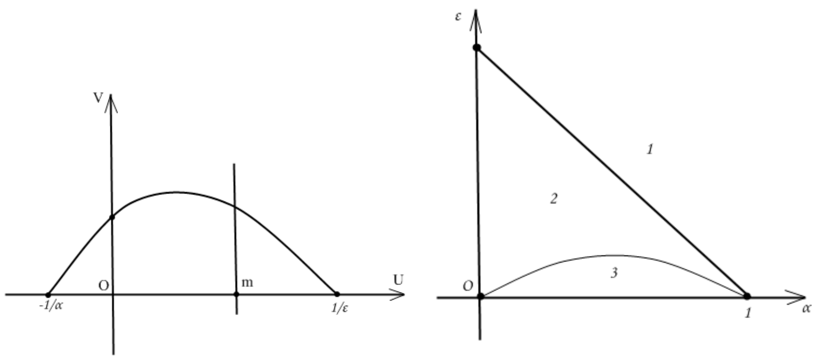
При α = 0 характер фазових портретів ММ відповідає рис. 3.

При μ = 0 ММ має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{U} = U - \frac{UV}{1+\alpha U} - \varepsilon U^2 \\ \dot{V} = -V + \frac{UV}{1+\alpha U} \end{cases}, \tag{3}$$

Рівняння нуль-ізоклин мають вигляд: $\dot{U} = 0$ і $U\left(1 - \frac{V}{1+\alpha U} - \varepsilon U\right)$; $\dot{V} = 0, V\left(-1 + \frac{U}{1+\alpha U}\right) = 0$, звідки випливає $U = \frac{1}{1-\alpha}$.

Нетривіальна точка рівноваги лежить у першій координатній четверті, являючи собою перетин параболи *V* і прямої *U* = *m*, *m* = const і $0 \le m < 1/\varepsilon$.



а б

Рис. 5. Фазовий (а) і параметричний (б) портрети ММ(3)

Її координати записуються: $\overline{U} = \frac{1}{1-\alpha}$; $\overline{V} = \frac{1-\alpha-\varepsilon}{(1-\alpha)^2}$. Нерівність $(\alpha + \varepsilon) < 1$ очевидна.

Оскільки V(0) = 1, то має місце ε = α(1 – α).

Матриця лінеаризації (Якобі) для ММ(3) має вигляд:

$$J = \begin{pmatrix} 1 - 2\varepsilon U - \frac{V}{(1+\alpha U)^2} & -\frac{U}{1+\alpha U} \\ \frac{V}{(1+\alpha U)^2} & -1 + \frac{U}{1+\alpha U} \end{pmatrix}.$$

Її слід є $SpJ = -2\varepsilon\overline{U} - \frac{\overline{V}}{(1+\alpha\overline{U})^2} + \frac{\overline{U}}{1+\alpha\overline{U}}$, де $\overline{U}, \overline{V}$ — координати особливої точки. З умови $SpJ = 0$ знаходиться рівняння лінії нейтральності.

Визначник матриці Якобі записується $detJ =$ $= -1 + \frac{2\varepsilon\alpha\overline{U}^2}{1+\alpha\overline{U}} + \frac{\overline{V}+\overline{U}(1+\alpha\overline{U})}{(1+\alpha U)^2}$.

Після очевидних алгебраїчних перетворень він додатній, коли виконується нерівність $\varepsilon < 1/(1-3\alpha)$. Тоді особлива точка — центр (рис. 1).

Параметричний портрет ММ (3) зображено на рис. 5, б. При переході параметрів від області 2 до 3 рівноважна точка виражає стійкість, навколо неї формується стійкий граничний цикл. Фазові портрети в зазначених областях мають вигляд (рис. 5, в—д).

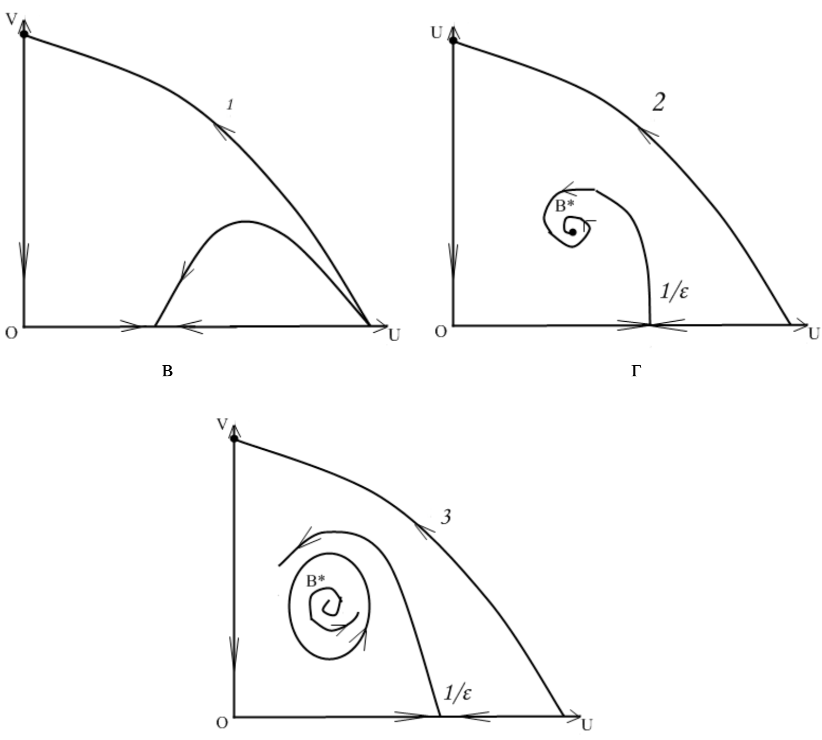


Рис. 5, в—д. Фазові портрети для областей 1—3 параметричного портрета

На відміну від попереднього з'являється якісно новий тип поведінки: в області 3 рівноважна точка локально нестійка, але оточена стійким граничним циклом.

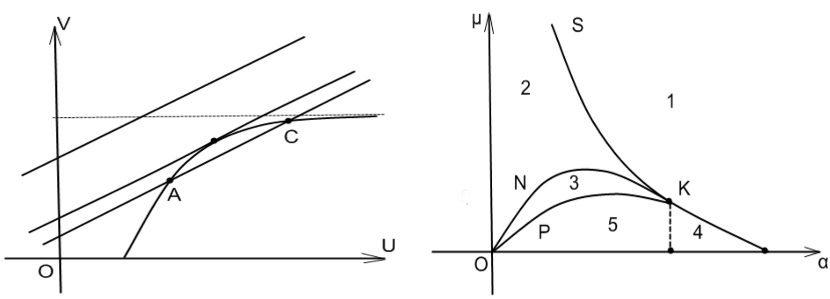
Конкуренція для першої змінної U відображається доданками (εU^2) і виступає стабілізуючим фактором, а насиченість другої змінної V (за рахунок множника $1/(1 + \alpha U)$) є дестабілізуючим фактором. Вище лінії нейтральності $N = \alpha(\alpha - 1)/(\alpha + 1)$ домінує перший фактор, а нижче — другий. В області нестійкості рівноваги співіснування змінних відбувається в автоколивному режимі. Плавне зменшення ε сприяє втраті стійкості рівноваги з м'яким зародженням автоколивань.

Збільшення параметра α, яким характеризується інтенсивність насичення, можна як сприяти втраті стійкості, так і набутті її, зважаючи на параболічну залежність $\varepsilon(\alpha)$.

Для $\varepsilon = 0$ ММ записується:

$$\begin{cases} \dot{U} = U - \frac{UV}{1+\alpha U} \\ \dot{V} = -V + \frac{UV}{1+\alpha U} - \mu V^2 \end{cases}. \tag{4}$$

Нуль-ізоклина $\dot{U} = 0$ складається із двох прямих $U = 0$ і $V = 1 + \alpha U$. Нуль-ізоклина $\dot{V} = 0$ складається з прямої $V = 0$ та гіперболи $y = \frac{1}{\mu}\left(\frac{U}{1+\alpha U} - 1\right)$. Пряма $y = 1 + \alpha U$ і гіпербола можуть перетинатись або ні та дотикатись, що графічно зображено на рис. 6, а.



а б

Рис. 6.

а — взаємне розташування; б — параметричний портрет нуль-ізоклин ММ (4)

Таким чином, точок рівноваги може бути дві, одна або жодної. Вони (їх координати) знаходяться із системи нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} U\left(1-\dfrac{V}{1+\alpha U}\right)=0 \\ V\left(-1+\dfrac{U}{1+\alpha U}-\mu V\right)=0. \end{cases}$$

Окрім тривіального розв'язку існують ще дві точки A і C, координати яких визначаються рівнянням $\left(-1+\frac{U}{1+\alpha U}-\mu(1+\alpha U)\right)=0$.

Воно отримується, коли рівнянні прямої $V = 1 + \alpha U$ підставити в третій доданок другого рівняння системи. Очевидні перетворення приводять до квадратного рівняння:

$$\mu\alpha^2U^2+(2\mu\alpha+\alpha-1)U+(\mu+1)=0. \qquad (*)$$

Із умови невід'ємності його дискримінанта $(2\mu\alpha + \alpha - 1)^2 - 4\mu\alpha^2(\mu + 1) = 0$. Отримується нерівність $\mu \le \frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha}$. У випадку рівності маємо лінію S, яка на площині параметрів $\{\alpha,\mu\}$ розмежовує області, де існують рівноважні точки або вони відсутні (область 1).

Згадувана рівність також є умова існування на фазовому портреті ММ(4) виродженої особливої точки типу «сідло-вузол», отже лінія S є місцем їх розташування.

Матриця лінеаризації ММ (4) має вигляд:

$$J=\begin{pmatrix} 1-\dfrac{V}{(1+\alpha U)^2} & -\dfrac{U}{1+\alpha U} \\ \dfrac{V}{(1+\alpha U)^2} & -1+\dfrac{U}{1+\alpha U}-2\mu V \end{pmatrix}.$$

Її слід $SpJ = -\frac{V}{(1+\alpha U)^2}-2\mu V+\frac{U}{1+\alpha U}$; визначник після алгебраїчних перетворень $detJ=-1+2\mu V\left(\frac{1}{(1+\alpha U)^2}-1\right)+\frac{V}{(1+\alpha U)^2}+\frac{U}{1+\alpha U}$.

Зважаючи на корені $U_{1,2}$ квадратного рівняння (*), на підґрунті виразів сліда і визначника матриці J лінеаризації та діаграми (рис. 1) стверджується, що точка A є вузол, або фокус (стійкість визначається параметрами α і μ), а точка C —сідло.

Існує так звана лінія *N* нейтральності рівноважної точки $A(\overline{U},\overline{V})$, що випливає з рівності $SpJ(\overline{U},\overline{V})=0$, тобто $\mu = \frac{\alpha\overline{U}^2+(\overline{U}-\overline{V})}{2\overline{V}(1+\alpha\overline{U})^2}$ після очевидних алгебраїчних перетворень виразу для сліда матриці. Лінія *N* являє собою графік деякої функції, в чисельнику якої стоїть лінійний вираз від α, а в знаменнику — нелінійна залежність також від α. Графік зазначеної функції досить відомий: виходить з початку системи координат і перетинає лінію *S* у деякій точці *K* (рис. 6, б). Вище лінії *N* параметри α і μ сприяють стійкості особливої точки *A* і навпаки. При русі зверху донизу і перетині лінії нейтральності *N*, втрата точкою *A* стійкості супроводжується появою малого стійкого граничного циклу, що геометрично для кожної точки з областей відображено [5] на рис. 7.

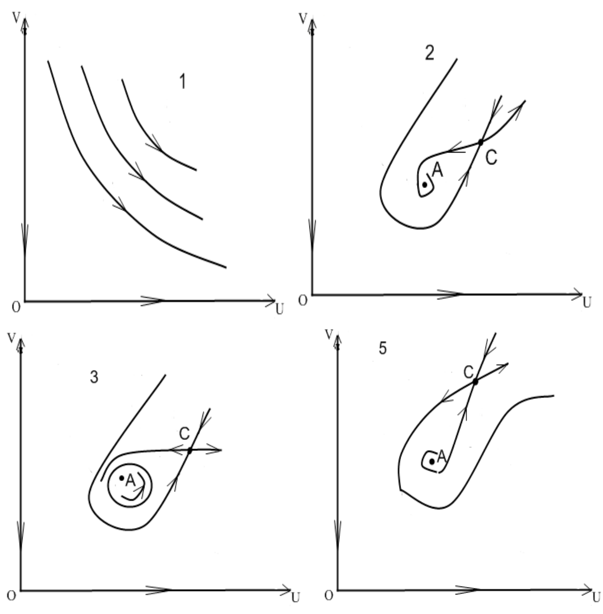
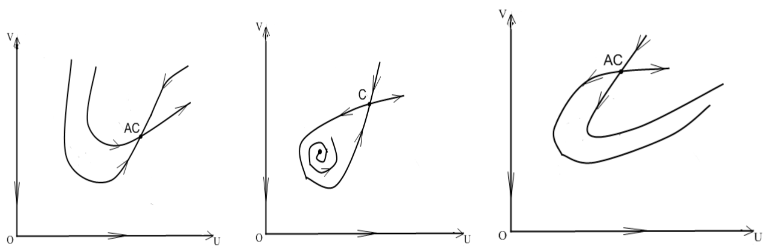


Рис. 7. Фазові портрети ММ (4) для різних областей

Зауваження. Принагідно привернути увагу до наступного. Якщо економічну систему, що перебуває в стаціонарному (рис. 7 для області 2) або автоколивному (рис. 7 для області 3) режимах збурити (в сусупільстві здійснюється різними важелями), наприклад різким зменшенням числових значень змінної *U*, то спостерігатиметься необмежене кількісне зростання першої змінної ММ (4).

Історія розвитку економіки ряснiє прикладами такого роду, також в інших сферах (екологія, біофізика, біологія) спостерігаються зазначені парадоксальні ефекти.

У точку *K* (рис. 6б) входить ще одна біфуркаційна лінія *P*: її утворюють такі точки (зняччення параетрів μ і α), для яких на фазовому портреті ММ одна із сепаратрис сідла, що виходить із нього, тобто має місце петля сепаратриси (сепаратрисний цикл). Лінія петлі сепаратрис на рис. 6 б позначена *P*. На рис. 8 приводиться геометрична інтерпретація вищесказаного [5].



а б в

Рис. 8. Фазові портрети ММ (4) для значень параметрів на біфуркаційних лініях:

а) для *S* зліва і вище точки *K*; б) *P*; в) для *S* справа і нижче точки *K*.

Характеристика портретів і біфуркацій. Опишемо досить складну динамічну поведінку ММ (4): область 1 порожня; область 2 має дві точки рівноваги; в області 3 лежать стійкий граничний цикл і поза ним стійка рівноважна точка; в області 5 існує одна стійка особлива точка. На параметричному портреті (рис. 6, б) відсутня тривіальна точка.

Оскільки точка *K* є спільною для усіх чотирьох областей 1, 2, 3 і 5, то в околі її можна розглядати всі біфуркації.

В області 1 не існує рівноважних (особливих) точок. При перетині лінії *S* вище точки *K* з переходом до області 2 з'являється стійкий сідловузол *AC* (рис. 8,а), який згодом розпадається на стійкий вузол *A* і сідло *C*.

Сепаратриса, що входить у сідло *C* (рис. 7, область 2), розмежовує область на 2 частини для початкових умов, в одній з них має місце тяжіння до точки А, а в іншій — траєкторії розбігаються.

Для параметрів із області 3 залежно від початкових умов фазові траєкторії накручуються на граничний цикл або розбігаються.

Для моменту, коли параметри ММ (4) набувають значень, що лежать на лінії *P* петлі сепаратриси, стійкий граничний цикл зливається з петлею (рис. 8, б). З переходом параметрів до області 5 сепаратрисний цикл на фазовому портреті гине (рис. 7).

Таким чином, взаємне розташування трьох кривих: сідло-вузла S; лінії N нейтральності і петлі P сепаратрис цілком визначає структуру параметричного портрета (рис 6, б) ММ (4). Він являє собою цілісну структуру взаємоузгоджених областей, що робить правомірною його назву — структурний портрет. Очевидно, що поняття структурного або параметричного портрета тільки з'являється в економіко-математичному моделюванні, хоча воно цілком принагідно існує в інших сферах [5, 6] математичного моделювання. Слушність використання цього поняття для успішного і дієвого пізнання природи і механізму нелінійної економічної динаміки на підґрунті комп'ютерного моделювання незаперечна.

Економічне тлумачення результатів якісного дослідження. Залежно від значень параметрів ММ (4) та початкової умови (стартової для економічного процесу) можливі наступні режими функціонування економічної системи: а) необмежений ріст змінної x і асимптотична насиченість — стабілізація щільності значень змінної у на рівні $V = \frac{1-\alpha}{\alpha\mu}$; б) стійке співіснування складових економічного процесу в стаціонарному режимі — рівноважний стан у точці A або в автоколивному режимі — стійкий граничний цикл.

При значеннях параметрів в областях 1 і 5 поведінка розв'язків ММ (4) не залежить від початкових умов; для областей 2 і 3 фазовий простір розподіляється на одну частину — область тяжіння стійкої рівноваги чи стійкого граничного циклу та другу, де фазові траєкторії змінної x необмежено ростуть.

Межу області початкових умов, де розв'язки ММ скінченні, справедливо кваліфікувати як небезпечну для нормального функціонування економічної системи. Резонно на параметричній площині виокремити область змінюваності параметрів, де реалізується режим нормального функціонування. Відповідно межа її називатиметься небезпечною параметричною. Для ММ (4) зазначену область утворюють 2 і 3, а межею виступають ділянки лінії S вище точки K і лінії P петлі сепаратриси. Із рис. 6, б випливає, що будь-яка варіація μ небезпечна: при збільшенні μ рівновага лишається стійкою, але наближається до межі області тяжіння і, досягнувши критичного значення (перетину лінії S), сягає межі області 2 (утворюється сідловузол) і гине; при зменшенні μ втрачається стійкість рівноваги з утворенням малого стійкого граничного циклу (м'яке збудження автоколивань), розміри його збільшуються — росте амплітуда коливань, котрі стають релаксаційними, і, нарешті, цикл руйнується на петлі сепаратриси.

Збільшення μ свідчить про посилення конкуренції в середовищі, описуваному змінною y, тобто відбувається падіння її граничної щільності значень. Зменшення μ сприяє спочатку локальній нестійкості, а потім і глобальній.

Висновки. Таким чином, для цілої низки математичних моделей (ММ) динаміки нелінійної економіки побудовано двовимірні параметричні портрети на координатних площинах простору параметрів (α, μ, ε).

При змінюваності числових ММ (4) можуть мати місце наступні біфуркації: 1) при виході з області 2 до інших спостерігається так званий жорсткий зрив рівноваги, що відбувається навіть при малих кількісних значеннях змінних моделі; 2) при перетині межі областей 2 і 3 відбувається так званий м'який зрив або зародження автоколивань навколо єдиної рівноваги; 3) для переходу з області 3 в іншу, крім 2, може мати місце також жорсткий зрив рівноваги з виходом на стійкий граничний цикл; 4) при виході з області 5 в інші можуть відбуватися жорсткий зрив автоколивань і перехід системи до стійкої рівноваги в середині граничного цикла. Інший можливий варіант розвитку подій — відбувається зародження відразу великого циклу, з виду начебто жорсткого збудження, але при русі в зворотному напрямку для того самого значення параметру немає місця явище гістерезису (рух по циклу припиняється).

Зауваження. Очевидно, що поняття жорсткого зриву цілком відповідає такому економічному явищу як дефолт або біржовий обвал, коли відбувається стрімке падіння показників, хоча напередодні витримувався плавний характер їх змінюваності.

Отже, на підґрунті математичного моделювання здійснено дослідження гіпотетичної нелінійної економічної системи, а саме: а) якісно вивчено математичні моделі (ММ) з кількома стійкими атракторами; б) розглянуто динаміку поведінки, залежно від числових параметрів моделі; в)ураховано стани насиченості та конкуренції.

Привернуто увагу до наступного: а) існує так зване порогове, або критичне значення числових коефіцієнтів ММ, перехід через яке принципово міняє режим функціонування; б) спостерігається розмаїття фазових портретів та особливий характер їх поведінки поблизу межі стійкості; в) не тільки інтенсивність діянь ззовні, але і внутрішні механізми (стан) є визначальними для режиму функціонування економічної системи.

Якісне вивчення математичних моделей продемонструвало широку альтернативу динамічних режимів економічної системи, їх можливої взаємодії та взаємовпливу, що повністю відповідає вербальним уявленням економічної спільноти про надскладний характер економіки.

Література

1. *Волкова В. Н., Денисов А. А.* Теория систем: Учебное пособие. — М.: Высш. шк., 2006. — 511 с.
2. *Занг В. Б.* Синергетическая экономика: Время и перемены в нелинейной экономической теории. — М.: Мир, 199. — 360 с.
3. *Милованов В. П.* Синергетика та самоорганизация: Экономика. Биофизика. — М.: КомКнига, 2005. — 168 с.
4. *Милованов В. П.* Неравновесные социально-экономические системы: синеретика и самоорганизация. — М.: УРСС, 2001. — 263 с.
5. *Базыкин А. Д.* Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. — Москва — Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2003. — 368 с.
6. *Ризниченко Г. Ю., Рубин А. Б.* Биофизическая динамика продукционных процессов. — М.: Ин-т компьют. исслед., 2004. — 464 с.
7. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука, 1976. — 286 с.
8. *Арнольд В. И.* «Жесткие» и «мягкие» математические модели (Доклад на Всерос. конференции «Математики и общество. Математическое образование на рубеже веков». Дубна, 18—22 сент. 2000 г.). — http://nature.web.ru/db/msg.html?mid=1156628&s
9. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — 2-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2005. — 320 с.
10. *Козик В. В., Сидоров Ю. І., Сворцов І. Б., Тарасовська О. Б.* Застосування моделі Лоткі—Вольтерра для опису дуопольно-дуопсонієвої конкуренції // Актуальні проблеми економіки. — 2010. — № 2. — С. 252—260.
11. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные диференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями: Пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 243 с.

Статтю подано до редакції 15.07.10 р.