Ю.В. Коляда

МОДЕЛЮВАННЯ ДУОПОЛЬНО-ДУОПСОНІЄВОЇ КОНКУРЕНЦІЇ З ДОЛУЧЕННЯМ РЕЖИМУ НАСИЧЕННЯ

У статті досліджено моделювання динаміки економічних процесів на основі системи рівнянь Вольтерра-Лотки, яка враховує умови режиму насиченості. Лінію успішної поведінки на ринку товарів розроблено на підгрунті адекватної математичної моделі економічного явища чи процесу. Також наведено окремі приклади змодельованих економічних ситуацій.

Ключові слова: модифікація моделі Вольтерра-Лотки, моделювання нелінійної економічної динаміки.

Форм. 4. Рис. 6. Літ. 10.

Ю.В. Коляда

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДУОПОЛЬНО-ДУОПСОНИЕВОЙ КОНКУРЕНЦИИ С ПРИВЛЕЧЕНИЕМ РЕЖИМА НАСЫЩЕНОСТИ

В статье исследовано моделирование динамики экономических процессов на основе системы уравнений Вольтерра-Лотки, учитывающей условия режима насыщенности. Линия успешного поведения на рынке товаров разработана на основе адекватной математической модели экономического явления или процесса. Также приведены отдельные примеры смоделированных экономических ситуаций.

Ключевые слова: модификация модели Вольтерра-Лотки, моделирование нелинейной экономической динамики.

Y.V. Kolyada

DUOPOLY-DUOPSONY COMPETITION MODELING BY MEANS OF SATURATION MODE

The article studies the modeling of dynamics of the economic processes based on the system of Lotka-Volterra equations which takes into account the saturation mode. The successful behavior line at the commodities market is developed on the grounds of adequate mathematical model of economic phenomena or economic process. Examples of the modeled economic situations are presented.

Keywords: modification of the Lotka-Volterra model; modeling of the nonlinear economic dynamics.

Постановка проблеми. «Досягти ефективності економічних рішень без застосування математичних методів і моделей сьогодні уже неможливо» [3]. Дійсно, щоб успішно вести бізнес, треба володіти сценаріями можливого перебігу подій за умови настання тих чи інших обставин, різноманітних, а подекуди суперечливих. Передбачення розвитку економічної ситуації сприяє попередній підготовці до неї і намаганню зробити її керованою.

Лінія успішної поведінки на ринку товарів розробляється на підгрунті адекватної математичної моделі (ММ) економічного явища, процесу тощо.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Одне із чільних місць у сучасному економіко-математичному моделюванні динамічних проблем належить [1; 5; 6; 8] моделі «жертва-хижак» або моделі Вольтерра-Лотки, добре відомій у математичній біології, екології та біофізиці [2]. Інші можливості використання цієї моделі у моделюванні економіки висвітлюються у працях [4; 5; 10]. Так, згідно з [4], у ролі жертви виступає норма зайнятості працездатного населення, а «хижаком» є частка зарплатні працівника відповідно до рівня питомого обсягу виробництва; у [10] приймається, що однією із змінних є ціна одиниці продукції, іншою – обсяг продукції, причому перетин кривих як функцій часу відповідає точці левериджу – оптимальному співвідношенню між ціною й обсягом створеної продукції; на думку автора статті [5], модель «жертва-хижак» описує взаємовідносини типу «ресурс-споживач».

Слід підкреслити, що однаковий математичний опис на перший погляд досить різнорідних об'єктів моделювання пояснюється їх приналежністю до одного класу відкритих, нелінійних, незворотної дії синергетичних систем.

На всіх ієрархічних рівнях управління економікою відчувається брак інформації, яка сприяла б прийняттю виважених і своєчасних рішень. Лише імітаційне (математичне і комп'ютерне) моделювання діяльності суб'єкта господарювання спроможне надати потрібну інформацію, ґрунтуючись на адекватних ММ.

Критичний аналіз праць з даної тематики свідчить про активний розвиток принципово іншого, ніж економетричне моделювання, підходу до вивчення економічних систем у динаміці. Дієвість такого підходу неодноразово демонструвалась при розв'язанні природничих і технічних задач [9].

Мета дослідження полягає в тому, щоб у комп'ютерному моделюванні економічної динаміки з використанням систем рівнянь Вольтерра-Лотки врахувати стан насиченості економічного процесу.

Основні результати дослідження. Зберігаючи позначення статті [6], математична модель дуопольно-дуопсонієвої конкуренції з урахуванням стану насиченості записується так:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = r_1 N_1 - \dfrac{r_1}{K_1} N_1^2 - \dfrac{\alpha r_1}{K_1} \dfrac{N_1 N_2}{(1+N_1)}; \\ \dot{N}_2 = r_2 N_2 - \dfrac{r_2}{K_2} N_2^2 - \dfrac{\beta r_2 N_1 N_2}{K_2(1+N_1)}, \end{cases} \tag{1}$$

де змінні N_1 і N_2 трактуються як річні обсяги реалізованої продукції конкуруючих підприємств, а їх похідні $\dot{N}_1 = \dfrac{dN_1}{dt}$ і $\dot{N}_2 = \dfrac{dN_2}{dt}$ по часу t описують швидкість змінюваності цих величин; можливий річний приріст продукції кожного підприємства відображається коефіцієнтами r_1 і r_2; величини K_1 і K_2 відповідають максимальному обсягу ринку для першого і другого підприємств (їхня сума $K_1 + K_2$ становить обсяг всього ринку); безрозмірні коефіцієнти α і β відображають ступінь конкуренції між виробниками. Існує також внутрішньовидова конкуренція для кожного підприємства, яка у ММ відображається другим доданком кожного рівняння. Конкуренція стосується вичерпання ринку (дуополія) або ресурсу (дуопсонія).

Необхідно зазначити, що етап «м'якого» моделювання (побудови фазових і параметричних портретів) нелінійної економічної динаміки з використанням ММ (1) детально розглянуто у праці [10]. Нижче наведено результати кількісного моделювання в типових для економічної практики ситуаціях [6].

Для числових даних: $K_1 = 500$; $K_2 = 700$; стартова (початкова) умова $N_{01} = 10$ і $N_{02} = 20$; $r_1 = 0,9$; $r_2 = 0,5$; за наявності конкуренції $\alpha = 0,6$ і $\beta = 0,7$ результати комп'ютерного моделювання відображено на рис. 1, де графік а) відповідає інтегральним кривим (розвитку подій з плином часу), а графік б) є фазовим портретом (взаємозалежність між змінними N_1 і N_2). Обидва виробники (змінна N_1 приблизно за 8 одиниць часу, а змінна N_2 приблизно за 16 часових одиниць) завойовують свої сегменти ринку.

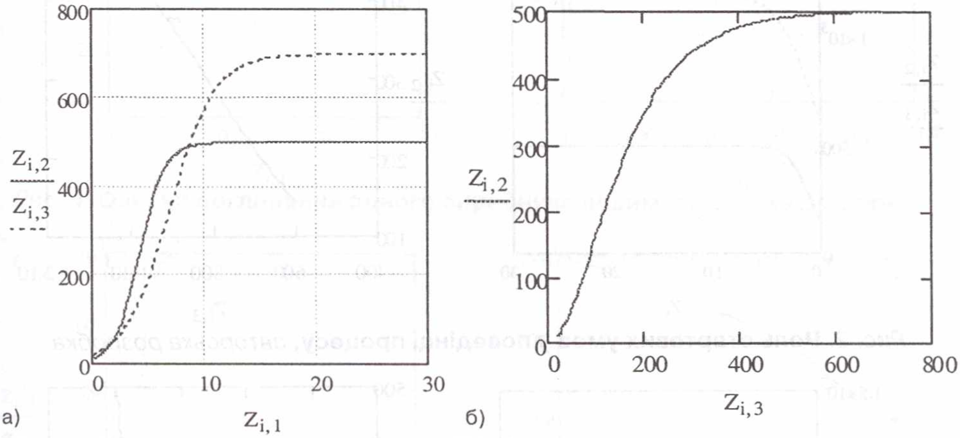


Рис. 1. **Нелінійна динаміка обсягу виробництва:** $Z_{i,1}$ **– час;** $Z_{i,2} = N_1$**;** $Z_{i,3} = N_2$**; а) інтегральні криві; б) фазовий портрет,** *авторська розробка*

Для випадку: $K_1 = 500$; $K_2 = 1200$; $N_{01} = 143$ і $N_{02} = 598$; $r_1 = 0,9$; $r_2 = 0,5$; $\alpha = 0,6$ і $\beta = 0,7$ розрахунки доводять (рис. 2), що виробники успішно функціонують на ринку товарів. Кожен з них досягає своєї мети (запланованих потужностей K_1 і K_2), причому це відбувається практично вдвічі швидше, ніж у попередньому випадку. Такий факт пояснюється тільки кращими стартовими (початковими N_{01} і N_{02}) умовами виробничої діяльності. Варто зауважити, що без врахування ефекту насиченості для вказаного набору коефіцієнтів ММ спостерігається [6] падіння обсягу виробництва першого підприємства і неповне досягнення планової потужності другим виробником.

Для числових значень коефіцієнтів ММ (1): $K_1 = 500$; $K_2 = 1200$; $r_1 = 0,9$; $r_2 = 0,5$; $\alpha = 0,6$ і $\beta = 50$ (тобто перший виробник інтенсифікує своє виробництво) і стартової умови $N_{01} = 5$ і $N_{02} = 990$ комп'ютерне моделювання показує (рис. 3), що перше підприємство досягає планової потужності, а друге – майже ($K_2 = 1150$). Отже, для другого виробника ця подія настає втричі швидше, ніж для першого.

На рис. 4 наводяться інтегральні криві а) і фазовий портрет б) моделювання ринкової діяльності двох підприємств для такого набору числових значень коефіцієнтів ММ(1): $K_1 = 1000$; $K_2 = 1000$; $r_1 = 0,9$; $r_2 = 0,5$; $\alpha = 0,5$ і $\beta = 0,5$ і стартової умови: $N_{01} = 860$ і $N_{02} = 20$. Обидва учасники ринкових подій досягають своїх планових потужностей, але перший за 2 одиниці часу, а другий – лише за 20! На той момент, коли перше підприємство досягне величини $K_1 =$

1000, другому виробнику залишається на ринку товарів тільки 200 одиниць (це чітко видно на графіку а) інтегральних кривих). Небезпека (для другого виробника) описаної ситуації полягає в тому, що подальше виробництво сприятиме кризі підприємства (продукція на складі – затоварення). Очевидно, це може призвести до процесу поглинання одного виробника іншим.

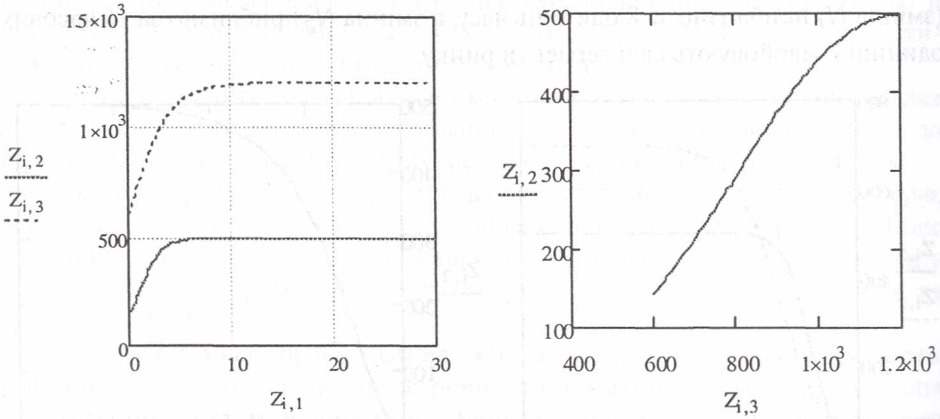


Рис. 2. **Роль стартових умов у поведінці процесу,** *авторська розробка*

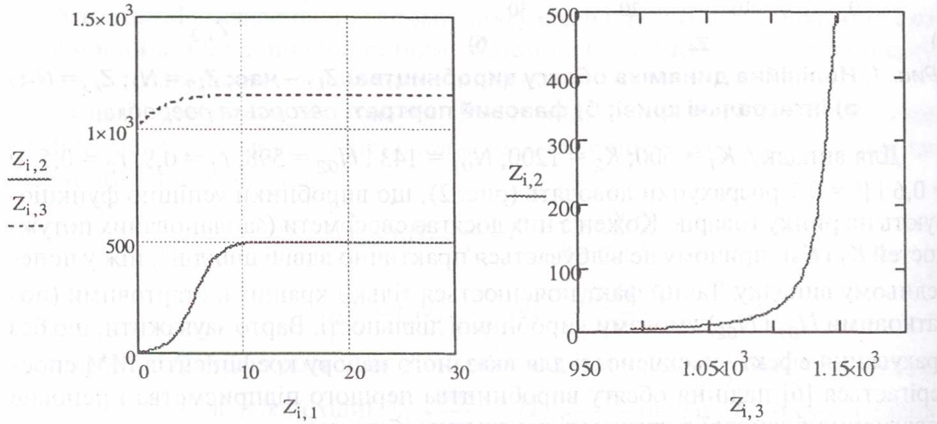


Рис. 3. **Вплив інтенсифікації виробництва (β = 50) на перебіг подій,** *авторська розробка*

Комп'ютерні розрахунки ММ (1) у ситуації: $K_1 = N_{01} = 1000$ – перший виробник домінує на регіональному ринку; $N_{02} = 10$, $\alpha = 1{,}5$, $r_2 = 1$ – з'являється інший виробник тієї ж продукції, але кращої якості. Метою цього виробника є захоплення ринку ($K_2 = 1000$), не звертаючи уваги ($\beta = 0$) на присутність на ньому іншого учасника (рис. 5).

Судячи з фазового портрета б), домінуючий виробник дещо (до 998,5 одиниць товару) поступився, поки інший досяг своєї планової потужності ($K_2 = 1000$). Це відбулося за 5–6 одиниць часу. На регіональному ринку спостерігається затоварення продукцією обсягами 798,5 од. виробів.

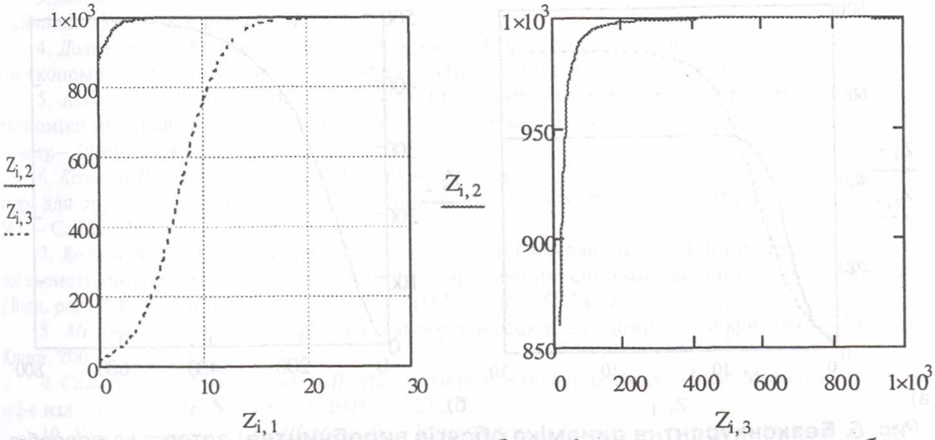


Рис. 4. **Ознаки поглинання одного виробника іншим,** *авторська розробка*

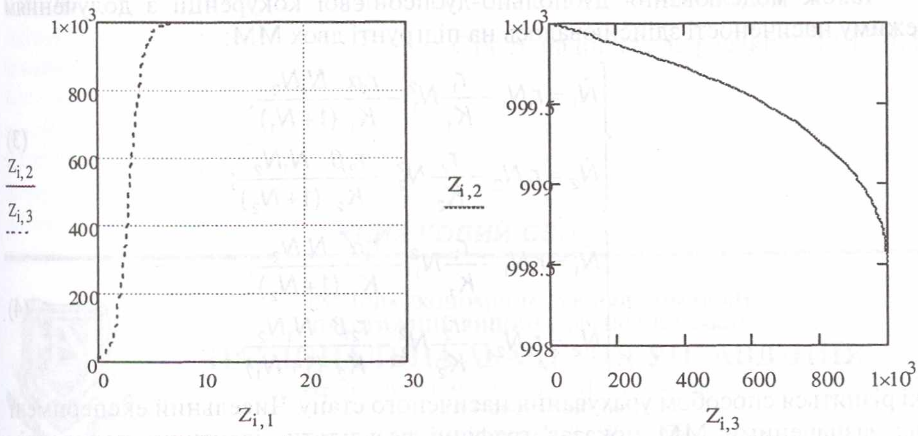


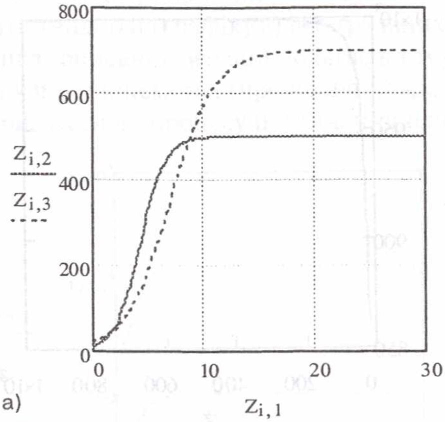
Рис. 5. **Динаміка заповнення ринку,** *авторська розробка*

Математично дуопольно-дуопсонієву конкуренцію з долученням режиму насиченості можна описати так:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = r_1 N_1 - \dfrac{r_1}{K_1} N_1^2 - \dfrac{\alpha r_1 N_1 N_2}{K_1 (1+N_2)}; \\ \dot{N}_2 = r_2 N_2 - \dfrac{r_2}{K_2} N_2^2 - \dfrac{\beta r_2}{K_2} \dfrac{N_1 N_2}{(1+N_2)}, \end{cases} \tag{2}$$

використовуючи змінну N_2. Зважаючи на рівноправність змінних моделі, це цілком правомірно.

Комп'ютерні розрахунки ММ (2) для всіх зазначених вище наборів числових значень коефіцієнтів моделі дали ідентичні результати, що абсолютно закономірно, виходячи зі змісту поняття насиченості процесу. На рис. 6. наводяться графіки моделювання для $K_1 = 500$; $K_2 = 700$; $r_1 = 0,9$; $r_2 = 0,5$ і відсутності конкуренції ($\alpha = 0$, $\beta = 0$). Інтегральні криві на рис. 1а) ідентичні кривим, отриманим у [6], а фазовий портрет розглядається вперше.



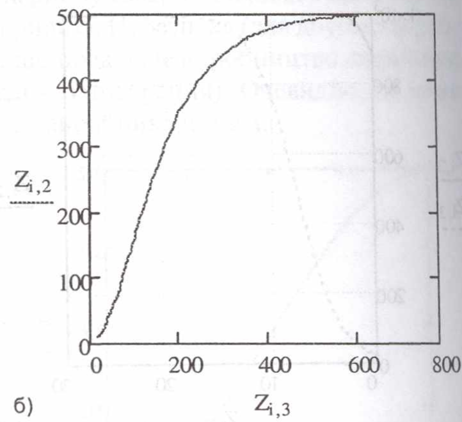


Рис. 6. **Безконкурентна динаміка обсягів виробництва,** *авторська розробка*

Також моделювання дуопольно-дуопсонієвої кокуренції з долученням режиму насиченості здійснювалось на підгрунті двох ММ:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = r_1 N_1 - \dfrac{r_1}{K_1} N_1^2 - \dfrac{r_1\alpha}{K_1}\dfrac{N_1 N_2}{(1+N_1)}; \\ \dot{N}_2 = r_2 N_2 - \dfrac{r_2}{K_2} N_2^2 - \dfrac{r_2\beta}{K_2}\dfrac{N_1 N_2}{(1+N_2)}; \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = r_1 N_1 - \dfrac{r_1}{K_1} N_1^2 - \dfrac{r_1\alpha}{K_1}\dfrac{N_1 N_2}{(1+N_2)}; \\ \dot{N}_2 = r_2 N_2 - \dfrac{r_2}{K_2} N_2^2 - \dfrac{r_2\beta}{K_2}\dfrac{N_1 N_2}{(1+N_1)}, \end{cases} \tag{4}$$

які різняться способом урахування насиченого стану. Чисельний експеримент над зазначеними ММ показав графічні результати, ідентичні попереднім розрахункам (рис. 1–6) для всіх наборів числових коефіцієнтів моделі.

Насамкінець слід зазначити, що розрахунки здійснювались у середовищі MathCad з використанням числового методу Рунге-Кутта.

Висновки. Динаміка нелінійних економічних процесів, яка є визначальною у прийнятті ефективних управлінських рішень, вивчається на підгрунті системи диференційних рівнянь. Саме так здійснюються дослідження у природознавстві, що не потребують сукупності статистичних даних, як цього вимагає економетричне моделювання. Щодо відомих в економічній літературі результатів, то у пропонованому дослідженні розглянуто математичні моделі, де враховано режим насиченості, що з плином часу настає у будь-якому процесі. Проведено кількісне дослідження ММ нелінійної економічної динаміки для важливих ситуацій конкурентної боротьби.

1. *Аганин Ю.И.* Хищник-жертва. Экономические положения // Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании. – Вып. 4. – Екатеринбург: УГГУ – УПИ, 2008. – С. 10–17.

2. *Базыкин А.Д.* Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. – М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2003. – 368 с.

3. *Вітлінський В.В., Піскунова О.В.* Математичні моделі та методи ринкової економіки: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2010. – 531с.

4. *Долятовский В.А., Касаков А.И., Коханенко И.К.* Методы эволюционной и синергетической экономики в управлении: Монография. – Отрадная: РГЭУ-ИУБиП, 2001. – 577 с.

5. *Ісаєва Т.М.* Математичне моделювання економічних систем і синергетичний підхід // Економіка та управління національним господарством: Вісник Бердянськ. ун-ту менеджменту і бізнесу.– 2009.– №4. – С. 27–34.

6. *Козик В.В., Ю.І. Сидоров, І.Б. Скворцов, Тарасовська О.Б.* Застосування моделі Лоткі-Вольтерра для опису дуопольно-дуопсонієвої конкуренції // Актуальні проблеми економіки.– 2010.– №2. – С. 252–260.

7. *Коляда Ю.В.* Фазові та параметричні портрети ключових математичних моделей нелінійної економічної динаміки // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Зб. наук. праць / Відп. ред. В.К. Галіцин. – Вип. 82. – К. : КНЕУ, 2010. – С. 74–90.

8. *Милованов В.П.* Синергетика и самоорганизация: Экономика. Биофизика. – М.: Ком Книга, 2005. – 168 с.

9. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2005. – 320 с.

10. *Христиановский В.В., Щербина В.П.* Динамическая модель поведения субьектов на рынке продукции // Моделирование нелинейной динамики экономических систем.– 2005. – №1. – С. 70–78.

Стаття надійшла до редакції 21.01.2011.