УДК 330:51 (075.8)

Ю. В. Коляда, *докторант,*
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

МОДЕЛЮВАННЯ ДІЯЛЬНОСТІ ЕКОНОМІЧНОГО АГЕНТА

Визначальними чинниками діяльності фірми обрано кількість працівників Y_1, величина власного капіталу Y_2 та обсяг кредитів Y_3. З використанням синергетичного підходу у вказаних координатах побудовано математичну модель (ММ) функціонування економічного агента, окремими випадками якої є відоме в літературі. Детально розглянуто задачу «м'якого» моделювання економічної діяльності об'єкта господарювання, також наведено деякі кількісні результати моделювання.

Ключові слова: синергетичні принципи, математична модель, числове моделювання, методика якісного дослідження.

У суспільстві з глибокотрансформаційною економікою об'єкт господарювання для свого існування, і тим більше успішного, повинен не тільки адекватно реагувати на змінюваність економічного середовища, скільки зобов'язаний передбачувати події, їх динаміку, володіти сценарієм розвитку. Щоб уникнути некерованого (хаотичного) ходу подій, також бажано не допускати входження макрочинників економічної системи в таку царину, де започатковується і настає режим дивної поведінки (дивного атрактора). Економічна діяльність, як відомо, наповнена фінансовими кризами, дефолтами на товарних біржах, стрімкими інфляційними процесами тощо.

Зрозуміло, що досягти передбачуваності та керованості економічних процесів у суспільстві чи окремо взятій господарській одиниці (економічному агенті) можна тільки з використанням методології та інструментарію математичного моделювання, де вербалізація проблеми виступає як етап на шляху побудови адекватної математичної моделі (ММ).

Робіт, що належать до тематики моделювання нелінійної динаміки економіки, зокрема на прикладі господарської одиниці (фірми), зовсім не багато [1—6], але їх кількість невпинно зростає. Коротко оглянемо деякі праці. В [1] чи не вперше запропоновано математичний опис економічного стану суспільства в координатах «виробники—продукт—управлінці». У роботі [2] уточнено цю модель, а потім вона отримала [3] подальший розвиток. Про результати аналізу особливих точок згадуваної вище ММ на стійкість повідомляється в [4]: серед чотирьох груп особливих точок залежно від співвідношення коефіцієнтів моделі спостерігаються стійкі і нестійкі, причому серед останніх — аперіодично та коливним чином.

Найперша модель (Гудвіна) економічного розвитку суспільства, яка зводиться до відомих (напр., Ван-дер Поля) рівнянь нелінійної механіки, ретельно і послідовно розглянута в [5].

У даній статті сформульовано основні положення синергетики і кінетики, з використанням яких записано ММ функціонування фірми. До речі, побудована нами ММ уточнює результати [6]. Також у статті викладено методику якісного аналізу системи трьох звичайних диференціальних рівнянь — просторової моделі, яка принципово відрізняється своїми можливостями від ММ на площині. Наведено деякі результати широкомасштабного обчислювального експерименту над побудованою в статті ММ.

Концетологія побудови ММ економічних процесів і явищ базується на використанні двох фундаментальних понять:

© Ю. В. Коляда, 2009

1) ***спосіб головних пропорцій*** у синергетиці стверджує, що швидкість змінюваності величини, вибраної як змінної економічного стану, пропорційна приросту зазначеного чинника мінус його витрати;

2) ***основний принцип кінетики*** — щоб узаємодіяти, слід зустрітися. Як правило, зустріч має білінійний характер.

Виходячи з вищезазначеного, в нашому випадку рівняння ММ функціонування фірми записуються так:

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 = -\gamma Y_1 + \alpha Y_2 + \alpha Y_2 Y_3 \equiv f_1(Y_1, Y_2, Y_3) \\ \dot{Y}_2 = \mu Y_2 - \beta Y_1 + \mu Y_3 - \beta Y_1 Y_3 \equiv f_2(\cdot) \\ \dot{Y}_3 = -\omega Y_3 + \delta Y_2 \equiv f_3(Y_1, Y_2, Y_3), \end{cases} \qquad (1)$$

де змінна $Y_1(t)$ описує кількість працівників фірми протягом часу t, змінна $Y_2 = Y_2(t)$ відтворює власний капітал, а $Y_3 = Y_3(t)$ — позичений капітал, тобто обсяг кредиту. А величини $\dot{Y}_1$, $\dot{Y}_2$, $\dot{Y}_3$ є похідні по незалежним змінній t.

Другий і третій доданки правої частини $f_1(\cdot)$ першого рівняння ММ (1) свідчать про те, що приріст числа працівників на фірмі прямопропорційний наявності власного капіталу Y_2 та використанню кредиту Y_3 за призначенням (зустріч капіталів відбулася — $\alpha Y_2 Y_3$), а перший член вказує на скорочення числа працівників на фірмі головним чином через відсутність фінансування та в силу інших, менш важливих причин.

Члени правої частини другого рівняння ММ (1) свідчать, що швидкість $\dot{Y}_2$ зростання власного капіталу визначається прямопропорційно його величині та обсягу кредитування (доданки μY_2 і μY_3) мінус витрати, пов'язані із зарплатою працівникам (доданки — βY_1 — $\beta Y_1 Y_3$). Коефіцієнти μ і β рівняння відображають частки використання власного капіталу Y_2 та кредиту Y_3 на зарплату працівників і не тільки на неї.

Третє рівняння системи (1) відтворює той факт, що на швидкість $\dot{Y}_3$ змінюваності обсягу кредиту (можливість додаткового кредитування) позитивно впливає наявність власного капіталу (δY_2) і негативним чином — вже наявні кредитні зобов'язання ($-\omega Y_3$).

ММ (1) несуперечлива в тому сенсі, що вона включає як окремий випадок лінійну модель [6] діяльності фірми з урахуванням тільки двох основних факторів — власного капіталу Y_2 і числа працівників Y_1.

«М'яке моделювання» або техніка якісного аналізу ММ (1). Спочатку шукаємо стаціонарні зв'язки Y_{1s}, Y_{2s}, Y_{3s}, прирівнюючи до нуля похідні, тобто розглядається нелінійна система алгебраїчних рівнянь

$$\left.\begin{aligned} &-\gamma Y_1 + \alpha Y_2 + \alpha Y_2 Y_3 = 0 \\ &\mu Y_2 + \mu Y_3 - \beta Y_1 - \beta Y_1 Y_3 = 0 \\ &\delta Y_2 - \omega Y_3 = 0 \end{aligned}\right].$$

З третього рівняння випливає: $Y_2 = \frac{\omega}{\delta} Y_3$, а з першого — $Y_1 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\alpha\omega}{\delta} Y_3 + \frac{\alpha\omega}{\delta} Y_3^2\right)$. Підстановкою цих виразів у друге рівняння алгебраїчної системи отримується

$$Y_3\left[Y_3^2 + 2Y_3 + \left(1 - \frac{\mu\gamma}{\beta\alpha} - \frac{\mu\gamma\delta}{\beta\alpha\omega}\right)\right] = 0$$

після очевидних перетворень. Отже, перший корінь $Y_3^{(1)}=0$ і маємо тривіальну особливу точку (0, 0, 0). Два інші корені записуються так:

$$Y_3^{(2,3)} = -1 \pm \sqrt{\frac{\mu\gamma}{\beta\alpha} + \frac{\mu\gamma\delta}{\beta\alpha\omega}}\,.$$

Тут слушно зауважити: оскільки шукані стаціонарні розв'язки мають перебувати в першому квадранті, то легко встановлюються співвідношення між коефіцієнтами ММ (1), а саме:

$$\mu\gamma > \beta\alpha\,, \tag{2а}$$

причому числові параметри ω і δ набувають довільних додатних значень, дотримуючись економічного змісту;

$$\frac{\mu\gamma}{\beta\alpha}\cdot\frac{\omega}{\omega+\delta} > 1\,. \tag{2б}$$

Вирази (2) випливають з вимоги додатності одного з коренів $Y_s^{(2,\,3)}$, щоб не обмежуватися тільки тривіальним стаціонарним розв'язком. Для цього має виконуватись умова $\frac{\mu\gamma}{\beta\alpha}\left(1+\frac{\delta}{\omega}\right) > 1$, реалізувати яку можна двояко.

Між іншим, вказані [6] числові значення коефіцієнтів ММ не задовольняють нерівностям (2), що зайвий раз засвідчує її алогічність.

Стійкість стаціонарних розв'язків оцінюється, знаючи корені характеристичного рівняння [7]

$$\left.\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_1} - \lambda\right) & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_2} & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_1} & \left(\frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_2} - \lambda\right) & \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_2} & \left(\frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_3} - \lambda\right) \end{vmatrix}\right|_{\substack{Y_1=Y_{1s}\\ Y_2=Y_{2s}\\ Y_3=Y_{3s}}} = 0 \tag{3а}$$

або

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0\,, \tag{3б}$$

де

$$a_1 = -\left(\frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_1} + \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_2} + \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_3}\right);$$

$$a_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_2} \\ \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_2} & \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_2} & \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_3} \end{vmatrix};$$

$$a_3 = -\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_2} & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_2} & \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_2} & \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial Y_3} \end{vmatrix}.$$

Якщо λ_1, λ_2, λ_3 шукані корені рівняння (3б), то виконуються рівності: $a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$; $a_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$; $a_3 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

При цьому використовувалися позначення: вирази $\frac{\partial f_i(\cdot)}{\partial Y_j}$ (i, j = 1, 2. 3; $f_i(\cdot)$ — відповідно праві частини рівняння ММ (1)) являють собою частинні похідні; позначення $|\cdot|$ відповідає визначнику другого порядку у відшуканні коефіцієнта a_2 і детермінанту третього порядку у випадку коефіцієнта a_3.

Конкретно у нашому випадку визначник (3а) набуває вигляду

$$\begin{vmatrix} (-\gamma-\lambda) & \alpha & \alpha Y_2 \\ -\beta-\beta Y_3 & \mu-\lambda & \mu-\beta Y_1 \\ 0 & \delta & -\omega-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

котрий обчислюється в стаціонарній точці.

Для дослідження характеру коренів рівняння (3б) та їх знаків використовуються: дискримінант рівняння

$$D_3 = -4\left(a_3 - \frac{1}{3}a_1^2\right)^3 - 27\left(a_3 - \frac{1}{3}a_1a_2 + \frac{2}{27}a_1^3\right)^2;$$

умови Гурвіца — $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $a_1a_2 - a_3 > 0$; теорема Декарта: число додатних коренів алгебраїчного рівняння ***рівне або менше*** на парне число від кількості перемін знаків у послідовності коефіцієнтів 1, a_1, a_2, a_3.

Зауваження. Ця сама теорема застосовується до числа від'ємних коренів рівняння і перемін знаків послідовності – 1, a_1, – a_2, a_3, тобто до коренів рівняння

$$-\lambda^3 + a_1\lambda^2 - a_2\lambda + a_3 = 0. \qquad (3в)$$

Класифікація особливих точок

1. ***Стійкий вузол***. Для рівняння (3б) виконуються умови Гурвіца, $D_3 \geq 0$. Усі корені дійсні від'ємні. Траєкторії входять в особливу точку.

2. ***Нестійкий вузол***. Умови Гурвіца виконуються для рівняння (3в), $D_3 \geq 0$; усі корені додатні; $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, $a_3 < 0$. Траєкторії виходять з особливої точки.

3. ***Стійкий фокус***. Умови Гурвіца виконуються для рівняння (3б); $D_3 < 0$; два корені комплексні з від'ємними дійсними частинами, один корінь від'ємний. Траєкторії входять в особливу точку, спірально закручуючись.

4. ***Нестійкий фокус***. Умови Гурвіца виконуються для рівняння (3в); $D_3 < 0$; два комплексні корені з додатними дійсними частинами. Траєкторії спірально закручені і виходять з особливої точки ($a_1 < 0$; $a_2 < 0$; $a_3 < 0$).

5. ***Сідло першого порядку***. Усі три корені дійсні: два від'ємні, один додатний; $D_3 \geq 0$. Траєкторії, що входять в особливу точку, утворюють поверхню сепаратрис. Тільки дві траєкторії виходять з особливої точки, вони мають спільну дотичну.

6. ***Сідло другого порядку***. Усі три корені дійсні, два додатні, один корінь від'ємний; $D_3 \geq 0$. Лише дві траєкторії входять в особливу точку. Траєкторії, що виходять з особливої точки, утворюють поверхню.

7. ***Сідло-фокус першого роду***. Два комплексні корені з від'ємними дійсними частинами, один корінь дійсний додатний. Усі траєкторії, що входять в особливу точку, закручені по спіралі і утворюють поверхню сепаратрис. Дві траєкторії виходять з особливої точки ($D_3 < 0$, $a_3 < 0$).

8. ***Сідло-фокус другого роду***. Два комплексні корені з додатними дійсними частинами, один корінь дійсний від'ємний. Напрямок траєкторії протилежний напрямку траєкторії попереднього випадку ($D_3 < 0$; $a_3 > 0$).

9. ***Нестійкий центр***. Два суто уявні корені, один дійсний додатний; виконується тільки необхідна умова існування кореня такого типу. Лише дві траєкторії виходять з особливої точки, інші лежать на паралельних циліндричних поверхнях.

10. ***Стійкий центр***. Характеристичне рівняння має два уявні корені й один дійсний від'ємний. Напрямок траєкторій протилежний напрямку траєкторій попереднього випадку.

Усі випадки з одним або кількома нульовими коренями є критичними. Задачею є дослідження сідлових точок і точок сідло-фокус, які лежать на поверхні сепаратрис.

Конкретно для тривіальної особливої точки ММ (1) записуються визначник

$$\begin{vmatrix} -(\gamma+\lambda) & \lambda & 0 \\ -\beta & \mu-\lambda & \mu \\ 0 & \delta & -(\omega+\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

і характеристичне рівняння

$$\lambda^3 + (\gamma-\mu+\omega)\lambda^2 + (-\mu\gamma+\omega\gamma-\mu\omega-\delta\mu+\beta\alpha)\lambda - \gamma\mu\omega - \delta\mu\gamma + \beta\alpha\omega = 0.$$

Його корені при числових значеннях [6] коефіцієнтів: $\alpha = 5$; $\beta = 8$; $\gamma = 1$; $\delta = 0{,}6$; $\mu = 2{,}1$; $\omega = 2{,}46$, чим детермінується існування тільки тривіальної особливої точки як виправданої предметно, наближено записується: $\lambda_1 = -2{,}5$; $\lambda_{2,3} = 0{,}65 \pm 6{,}02i$, тобто один дійсний і два комплексні спряжені з додатною дійсною частиною. Отже, спостерігається особлива точка сідло-фокус другого роду, геометричне зображення якої наводиться на рис. 1.

Деякі результати числового аналізу ММ (1). Система диференціальних рівнянь (1) при вказаних вище значеннях коефіцієнтів моделі чисельно інтегрувалася класичним методом Рунге-Кутта з постійним кроком *rk fixed* (Y, 0, 20, 400, N) на часовому відрізку [0,20], використовуючи пакет Mathcad. Графічно результати числового моделювання відображено на рис. 2—5, де згідно з пакетом прийнято позначення: $Z_{k,1}$ відповідає незалежній змінній t; $Z_{k,2} = Y_1$ — кількості працівників фірми; $Z_{k,3} = Y_2$ — капіталу; $Z_{k,4} = Y_3$ — кредиту.

На рис. 4 відображається змінюваність у часі чисельності працівників фірми, обсягів власного та позиченого капіталу, причому в перші три одиниці часу t відбуваються перехідні процеси для кожної змінної.

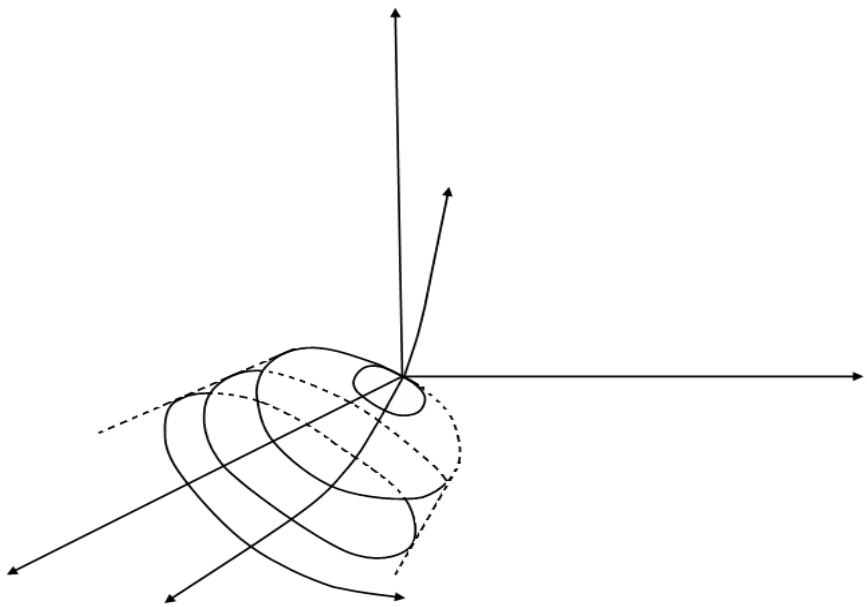

Рис. 1. Геометричне зображення особливої точки сідло-фокус другого роду

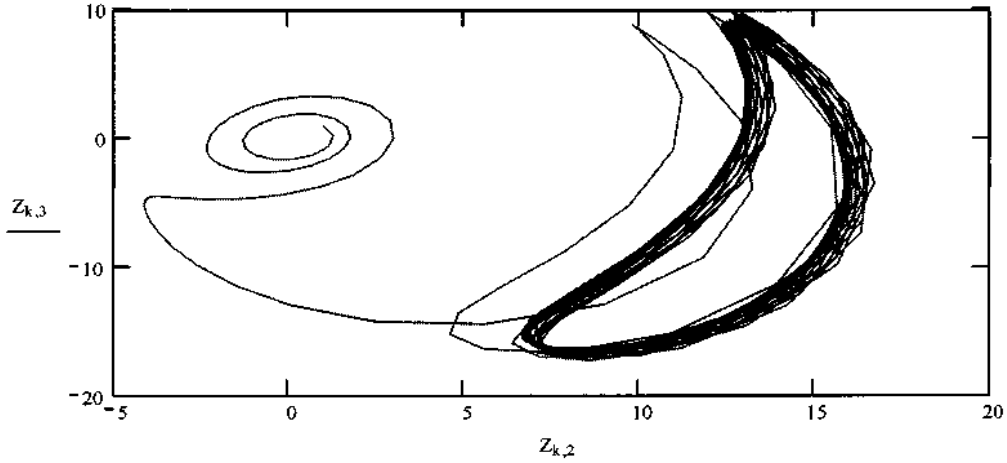

Рис. 2

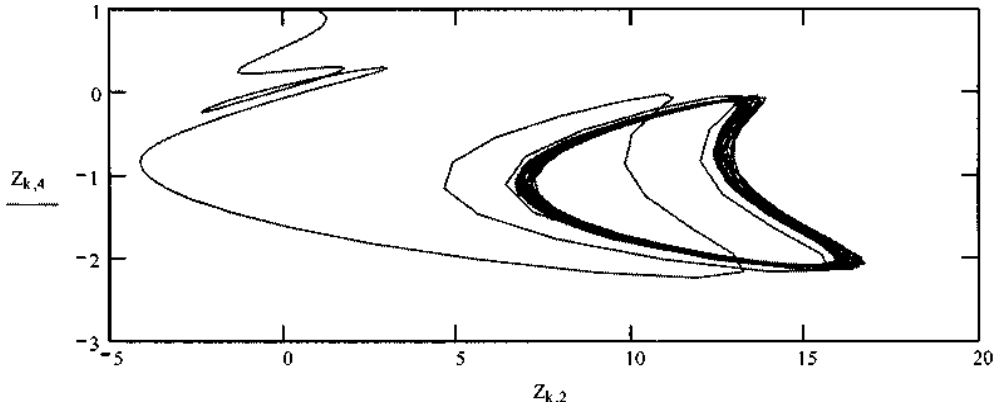

Рис. 3

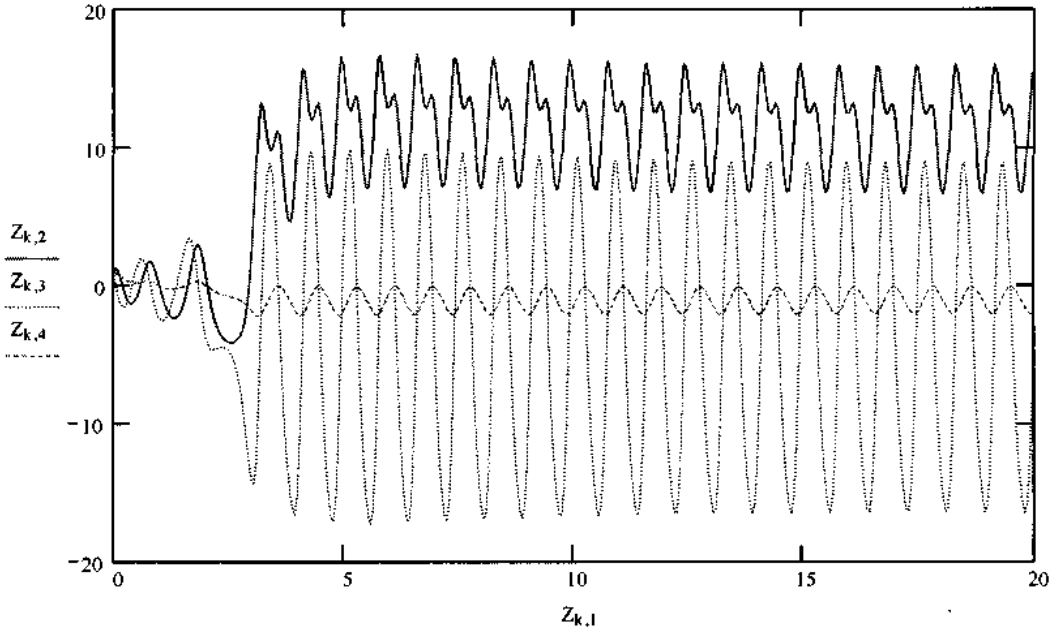

Рис. 4

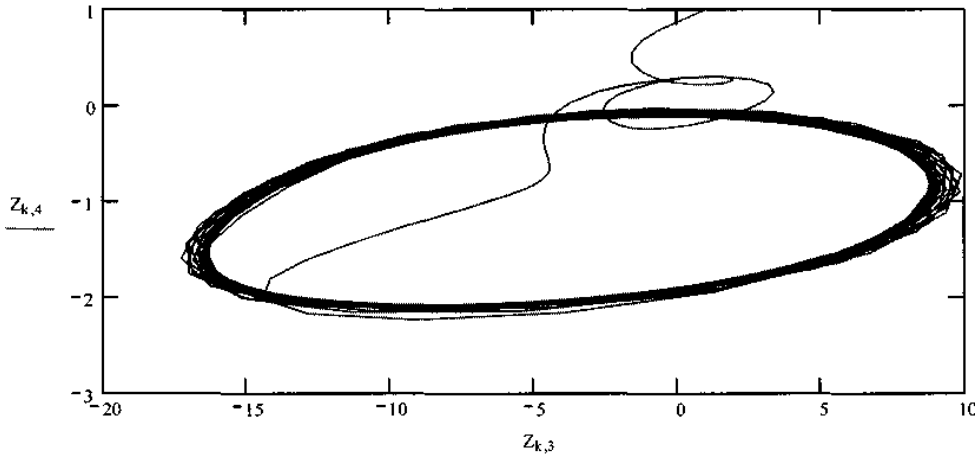

Рис. 5

Потім настають стійкі періодичні коливання для окремо взятої змінної, причому кількість працівників на фірмі стійко перебуває в певному коридорі значень, також капітал фірми сягає певної висоти і тільки обсяг кредитів стабілізується на незначному рівні.

Рис. 2, 3, 5 є фазовими, відповідно в координатах: рис. 2. — «число працівників—власний капітал»; рис. 3. — «число працівників—обсяг кредитів»; рис. 5. — «власний капітал—обсяг кредитів». На кожній фазовій координатній площині спостерігається граничний цикл досить складної конфігурації. На шляху до нього відбувається самоперетин фазової траєкторії. Наявність граничних циклів свідчить про стійкий характер поведінки фірми, складність якої зумовлюється зовнішніми впливами.

Висновки. Результати статті сприяють розробці сценаріїв поведінки фірми в економічному середовищі та пошуку якомога кращого. Вони дозволяють розглядати питання альтернативи коефіцієнтів ММ, щоб уникнути хаотичного атрактора, тобто краху фірми. З'являється можливість дослідити вплив на існування фірми тих чи інших чинників, передусім позики капіталу або кількість працівників фірми. У цілому стаття являє собою певну методологію математичного моделювання економіки, насамперед так званого м'якого моделювання — дослідження стійкості траєкторій економічного розвитку об'єкта господарювання.

Література

1. *Неймарк Ю. И.* Математическая модель производители — продукт — управленцы // Динамика систем. Динамика, стохастичность, бифуркации: Межвуз. сб. науч. тр. — Горький, 1990. — С. 84—90.

2. *Климов В. И., Ланда П. С.* Простейшая модель экономического развития общества // Изд. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. — Т. 1. — № 3—4. — С. 36—44.

3. *Ланда П. С.* Нелинейные колебания и волны. — М.: Наука, Физматлит, 1997. — 496 с.

4. *Бурак А. И.* Моделирование экономического развития человеческого общества // http://www.library.mephi.ru/data/scientific-sessions/2003/7/086.html

5. *Трубенков Д. И.* Введение в синергетику. Хаос и структуры: Изд. 2-е, испр. и доп. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 240 с.

6. *Шаповалов В. И. Каблов В. Ф., Башмаков В. А., Аввакумов В. Е.* Синергетическая модель устойчивости средней фирмы / В кн. «Синергетика и проблемы теории управления»: под ред. А. А. Колесникова. — М.: Физматлит, 2004. — С. 454—464.

7. *Тонда А.* Нелинейные колебания механических систем. — М.: Мир, 1973. — 334 с.

Надійшла до редакції: 28.01.2009