2. *Ульянченко О. В.* Дослідження операцій в економіці: [підручн. для студентів вузів] / О. В. Ульянченко. — Харк. нац. аграрн. ун-т ім. В. В. Докучаєва. — Харьків: Гриф, 2002. — 580 с.

3. *Степанов О. В.* Математичне моделювання та оптимізація: [навч. посіб.] / О. В. Степанов. — К.: ІВЦ «Видавництво Політехніка», 2004. — 112 с.

УДК 519.863:330.44

І. М. Ляшенко, д-р фіз.-мат. наук,
А. М. Онищенко, канд. екон. наук,
І. М. Онищенко, аспірант,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

УЗГОДЖЕННЯ ДЕТАЛІЗОВАНИХ ТА АГРЕГОВАНИХ МІЖГАЛУЗЕВИХ БАЛАНСІВ

АНОТАЦІЯ. Дослідження економічних процесів на макрорівні оперує агрегованими показниками. Деталізовані показники визначаються на мікрорівні. Зв'язок між деталізованими та агрегованими показниками здійснюється на основі методів агрегування. Автори зупинились на вивченні методу точного агрегування та визначили можливості його застосування до статичних та динамічних міжгалузевих балансових моделей, дослідження яких дозволяє збалансувати виробничі потужності, випуск продукції та витрати на виробництво.

ANNOTATION. Studying of macroeconomic processes operates with the aggregated indexes. Disaggregated indexes are determined by microeconomic analysis. Interdependence between aggregated and disaggregated indexes is based on the aggregation methods. The authors deal with exact aggregation methods and denoted possibilities to use them to static and dynamic «input-output» Leontief models, studying of which allows us to balance producing capacity, output and cost of production.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. Економіко-математичне моделювання, точне агрегування, модель Леонтьєва.

Вступ

Вивчення економічних показників вимагає від дослідника оперування значною кількістю даних, які в силу об'єктивних причин не можуть бути враховані у повному обсязі. Тому дослідник не може ефективно опрацювати їх без застосування надійних методів агрегування вхідної інформації.

Постановка завдання

Однією з перших лінійних балансових моделей, побудованих на деталізованих показниках, є міжгалузева балансова модель Леонтьева, відома під назвою «витрати—випуск» [1, 2]:

$$x = Ax + y, \quad x \ge 0, \quad y > 0, \tag{1.1}$$

де $x = (x_1, x_2, ..., x_N)^T$ — вектор-стовпець об'ємів виробництва продукції, $y = (y_1, y_2, ..., y_N)^T$ — вектор-стовпець кінцевого споживання продукції, $A \ge 0$ — невід'ємна матриця коефіцієнтів прямих витрат виробництва розмірності $N \times N$, елемент a_{ij} якої показує, яку кількість продукції i необхідно витратити на виробництво одиниці продукції j.

Модель Леонтьєва будується як у вартісному, так і у натуральному вигляді. У першому випадку елементами виступають цінові еквіваленти відповідних елементів. У другому випадку елементами є натуральні показники. Зв'язок між цими моделями здійснюється на основі відповідних цін на продукцію.

Результати 1

Розглянемо задачу агрегування міжгалузевого балансу (1.1) в єдиний продукт. Нехай $T = (p_1, p_2, ..., p_N)$ — агрегуючий вектор-рядок, де p_i — ціна i-го продукту. Помножимо обидві частини рівняння (1.1) на вектор T зліва, в результаті отримаємо:

$$Tx = TAx + Ty.$$

Врахувавши, що $X = Tx$ — агрегований показник валового випуску продукції у вартісному вираженні, $Y = Ty$ — агрегований показник обсягу кінцевого споживання продукції у вартісній формі, можемо записати рівняння агрегованого балансу у вигляді

$$X = TAx + Y. \tag{1.2}$$

Агрегований баланс також можна записати у скалярній формі

$$X = \tilde{a}X + Y,$$

де $\tilde{a}$ — числовий коефіцієнт прямих витрат виробництва.

Останнє рівняння можемо записати також у вигляді

$$X = \tilde{a}Tx + Y. \tag{1.3}$$

З рівностей (1.2) та (1.3) випливає таке співвідношення:

$$TA = \tilde{a}T. \tag{1.4}$$

Співвідношення (1.4) є умовою точного агрегування, відоме під назвою умови Хатанакі [3]. Розкриємо економічний зміст цієї умови. Рівняння (1.4) запишемо у вигляді:

$$T\left(A - \tilde{a}E\right) = 0, \tag{1.5}$$

де E — діагональна одинична матриця N-го порядку.

На елементи рівняння (1.5) накладемо такі додаткові умови:

А) $T > 0$ — випливає з того, що T — вектор цін.

Б) $A \neq \tilde{a}E$ — в іншому випадку технологічна матриця матиме вигляд діагональної, що сильно звужує коло досліджуваних задач.

За даних умов розв'язками рівняння (1.5), при нерозкладній продуктивній матриці A, будуть [4]:

$\tilde{a} = \lambda_A$ — корінь Фробеніуса матриці A,

$T = p_A$ — лівий вектор Фробеніуса матриці A.

Підсумовуючи отримані результати можна стверджувати таке.

Твердження 1: *Для продуктивної нерозкладної моделі міжгалузевого балансу $x = Ax + y$, $y > 0$ завжди існує єдине точне агрегування до одновимірного рівняння $X = \tilde{a}X + Y$, $Y > 0$, в якому $\tilde{a} = \lambda_A < 1$ — корінь Фробеніуса, а $T = p_A$ — лівий вектор Фробеніуса матриці A.*

Будемо досліджувати умову (1.4) іншим способом. Ліва частина цієї умови має вигляд

$$TA = \left(\sum_{i=1}^{N} p_i a_{i1}, \sum_{i=1}^{N} p_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^{N} p_i a_{iN} \right).$$

Права частина відповідно має вигляд

$$\tilde{a}T = \left(\tilde{a}p_1, \tilde{a}p_2, \dots, \tilde{a}p_N\right).$$

Можемо прирівняти отримані рівності.

$$\sum_{i=1}^{N} p_i a_{ij} = \tilde{a}p_j, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

звідки одержуємо

$$\sum_{i=1}^{N} p_i a_{i1} : \sum_{i=1}^{N} p_i a_{i2} : \ldots : \sum_{i=1}^{N} p_i a_{iN} = p_1 : p_2 : \ldots : p_N,$$

або

$$(PA)_1 : (PA)_2 : \ldots : (PA)_N = p_1 : p_2 : \ldots : p_N.$$

Остання рівність означає, що питомі вартісні прямі виробничі витрати галузей пропорційні цінам. Виходячи з вищесказаного, можна зробити такий висновок.

Твердження 2: *Необхідною та достатньою умовою точного агрегування моделі міжгалузевого балансу до одновимірного рівняння є вимога, щоб питомі вартісні прямі виробничі витрати галузей були пропорційні цінам продукції* p. *Тоді* $T = p$ *— буде агрегуючим вектором.*

2. Розглянемо задачу агрегування міжгалузевого балансу із N галузей в n, причому $1 < n < N$. Як і раніше, будемо вивчати рівняння Леонтьєва у вигляді (1.1).

Оскільки ми розглядаємо показники матриці A у натуральній формі, то для агрегування моделі (1.1) будемо вважати матрицю T матрицею цін:

$$T = \begin{pmatrix} p_1^1 \ldots p_{N_1}^1 \; 0 \ldots 0 \; \ldots \; 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 \;\; p_1^2 \ldots p_{N_2}^2 \ldots 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots 0 \;\; 0 \ldots 0 \ldots p_1^n \ldots p_{N_n}^n \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_n = N.$$

Розмірність агрегуючої матриці — $n \times N$, елемент p_j^s матриці відповідає ціні j-го продукту з множини $\{N_s\}$, де $\bigcup_{s=1}^{n} \{N_s\} = \{N\}$, $\{N_k\} \cap \{N_r\} = 0$ при $k \neq r$.

Матриці A та T у відповідності з (2.1) запишемо в клітковому вигляді

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} \; A_{12} \ldots A_{1n} \\ A_{21} \; A_{22} \ldots A_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n1} \; A_{n2} \ldots A_{nn} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} p^1 \; 0 \ldots 0 \\ 0 \;\; p^2 \ldots 0 \\ 0 \;\; 0 \; \ldots p^n \end{pmatrix}.$$

Помножимо рівняння (1.1) на T зліва, отримаємо

$$Tx = TAx + Ty.$$

Тут $Tx = X$, де $X = (X_1, X_2, ... X_n)^T$ — вектор-стовпець агрегованих валових випусків продукції; $Ty = Y$, де $Y = (Y_1, Y_2, ... Y_n)^T$ — вектор-стовпець агрегованих випусків кінцевої продукції. Можемо переписати останню рівність у вигляді:

$$X = TAx + Y. \tag{2.2}$$

З іншого боку рівняння агрегованого балансу має вигляд:

$$X = \widetilde{A}X + Y,$$

або

$$X = \widetilde{A}Tx + Y. \tag{2.3}$$

Порівнюючи рівності (2.2) та (2.3), приходимо до рівності Хатанакі:

$$TA = \widetilde{A}T,$$

де T — агрегуюча матриця; A, $\widetilde{A}$ — відповідно матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат деталізованого та агрегованого балансів. Причому матриця $\widetilde{A}$ має вигляд

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & \dots & \widetilde{a}_{1n} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} & \dots & \widetilde{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \widetilde{a}_{n1} & \widetilde{a}_{n2} & \dots & \widetilde{a}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Умову точного агрегування $TA = \widetilde{A}T$ розпишемо у розгорнутому вигляді

$$\begin{array}{l} p^1 A_{11} = \widetilde{a}_{11} p^1,\ p^1 A_{12} = \widetilde{a}_{12} p^2,\ ...,\ p^1 A_{1n} = \widetilde{a}_{1n} p^n, \\ p^2 A_{21} = \widetilde{a}_{21} p^1,\ p^2 A_{22} = \widetilde{a}_{22} p^2,\ ...,\ p^2 A_{2n} = \widetilde{a}_{2n} p^n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p^n A_{n1} = \widetilde{a}_{n1} p^1,\ p^n A_{n2} = \widetilde{a}_{n2} p^2,\ ...,\ p^n A_{nn} = \widetilde{a}_{nn} p^n. \end{array} \tag{2.4}$$

Враховуючи умову додатності всіх векторів цін, $p^s > 0$, $s = \overline{1, n}$, приходимо до висновку, що

$$\widetilde{a}_{ss} = \lambda_{A_{ss}}, \; p^s = P_{A_{ss}}, \; s = \overline{1, n}.$$

Тобто, що діагональні елементи агрегованої матриці $\widetilde{A}$ повинні бути коренями Фробеніуса діагональних клітин матриці A, а відповідні вектори цін — їх лівим векторам Фробеніуса.

Умову точного агрегування (2.4) можемо записати також у вигляді:

$$\left(p^s A_{sk}\right)_1 : \left(p^s A_{sk}\right)_2 : \ldots : \left(p^s A_{sk}\right)_{N_k} = p_1^k : p_2^k : \ldots : p_{N_k}^k,$$

$$s = 1, 2, \ldots, n; \;\; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Підсумовуючи отримані результати, можна зробити такий висновок:

Твердження 3: *Необхідною і достатньою умовою точного агрегування моделі міжгалузевого балансу з N-вимірного до n-вимірного рівняння $(1 < n < N)$ є вимога, щоб у всіх n частинних агрегуваннях питомі матеріальні витрати галузей були пропорційні цінам продукції.*

Зауваження. Додатково відзначимо, що умови точного агрегування (2.4) є достатньо жорсткими умовами і виконуються в досить рідкісних випадках. Проте можна вказати один простий випадок, коли вони виконуються завжди. Це випадок, коли деталізована технологічна матриця A має клітково-діагональний вигляд, тобто $A_{sk} = 0$ при $s \neq k$. При цьому маємо по-суті справу з сумою окремих балансів, кожний з яких агрегується окремо.

3. Якщо у задачі виникає необхідність досліджувати як виробничі витрати, так і витрати на розширення виробництва, то в такому випадку використовують динамічну модель міжгалузевого балансу, яка має вигляд:

$$x = Ax + B\dot{x} + y, \tag{3.1}$$

де A — матриця затрат на виробництво продукції, B — матриця затрат на розширення виробництва, $\dot{x}$ — вектор приростів виробництва за рахунок створення нових потужностей.

Поставимо задачу агрегування динамічної моделі Леонтьєва (3.1) в один продукт. Для розв'язання поставленої задачі виберемо агрегуючий вектор $T = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$, елемент p_i якого дорівнюють ціні i-го продукту, $i=\overline{1,N}$. Помножимо рівняння (3.1) на вектор T зліва. Отримаємо

$$Tx = TAx + TB\dot{x} + Ty. \tag{3.2}$$

З іншого боку, агрегований динамічний міжгалузевий баланс має вигляд:

$$X = \widetilde{a}X + \widetilde{b}\dot{X} + Y,$$

де $X = Tx$, $Y = Ty$ $\widetilde{a}$ та $\widetilde{b}$ — агреговані числові показники. Тобто, маємо

$$Tx = \widetilde{a}Tx + \widetilde{b}T\dot{x} + Ty. \tag{3.3}$$

З рівностей (3.2) та (3.3) випливають умови

$$\begin{aligned} TA &= \widetilde{a}T, \\ TB &= \widetilde{b}T, \end{aligned} \tag{3.4}$$

які є узагальненими умовами Хатанакі. Умови (3.4) можуть бути записані у вигляді

$$\begin{aligned} T\left(A - \widetilde{a}E\right) &= 0, \\ T\left(B - \widetilde{b}E\right) &= 0. \end{aligned}$$

Якщо розглядати загальний випадок, коли матриці A та B не є діагональними або нульовими, то з останніх рівностей одержимо такі результати. Число $\widetilde{a}$ дорівнює кореню Фробеніуса матриці A, число $\widetilde{b}$ — кореню Фробеніуса матриці B. Агрегуючий вектор $T = p_A = p_B$, де p_A та p_B — ліві вектори Фробеніуса для матриць A та B відповідно. Приходимо до такого твердження.

Твердження 4: *Необхідною і достатньою умовою існування точного агрегування для продуктивної нерозкладної моделі динамічного міжгалузевого балансу* $x = Ax + B\dot{x} + y$, $y > 0$ *до одновимірного рівняння* $X = \widetilde{a}X + \widetilde{b}\dot{X} + Y$, $Y > 0$, *де* $\widetilde{a} = \lambda_A < 1$, $\widetilde{b} = \lambda_B$ — *корені Фробеніуса матриць* A *та* B, *є умова рівності їх лівих векторів Фробеніуса. Тоді агрегуючий вектор* $T = p_A = p_B$.

З іншого боку, якщо записати умови (3.4) у розгорнутому вигляді, отримаємо для першого рівняння:

$$TA = \left(\sum_{i=1}^{N} p_i a_{i1}, \sum_{i=1}^{N} p_i a_{i2}, ..., \sum_{i=1}^{N} p_i a_{iN} \right),$$
$$\tilde{a}T = \left(\tilde{a}p_1, \tilde{a}p_2, ..., \tilde{a}p_N\right).$$

Прирівнявши обидві частини цих рівностей, можемо записати умову пропорційності

$$\sum_{i=1}^{N} p_i a_{i1} : \sum_{i=1}^{N} p_i a_{i2} ... : \sum_{i=1}^{N} p_i a_{iN} = p_1 : p_2 : ... : p_N .$$

Іншими словами, питомі матеріальні витрати галузі на виробництво i-ї продукції повинні бути пропорційними ціні на відповідну продукцію.

Застосувавши аналогічні міркування до другого рівняння системи (3.4), отримаємо такі співвідношення

$$\sum_{i=1}^{N} p_i b_{i1} : \sum_{i=1}^{N} p_i b_{i2} ... : \sum_{i=1}^{N} p_i b_{iN} = p_1 : p_2 : ... : p_N .$$

Тобто, питомі матеріальні витрати на розширення виробництва в i-й галузі повинні бути також пропорційні ціні продукції відповідної галузі.

Отже маємо таке твердження.

Твердження 5: *Необхідною та достатньою умовою точного агрегування моделі динамічного міжгалузевого балансу до одновимірного рівняння є вимога, щоб питомі матеріальні витрати галузей на виробництво продукції, а також питомі матеріальні витрати галузей на розширення виробництва були пропорційні цінам продукції* p. *Тоді* $T = p$ *— буде агрегуючим вектором.*

4. Перейдемо до задачі агрегування динамічної моделі Леонтьєва (3.1) з N-вимірної до n-вимірної. Причому виконується умова $1 < n < N$.

В такому випадку агрегуюча матриця T матиме розмірність $n \times N$, елемент p_j^s матриці відповідає ціні j-го продукту з множини $\{N_s\}$, де $\bigcup_{s=1}^{n} \{N_s\} = \{N\}$, $\{N_k\} \bigcap \{N_r\} = 0$ при $k \neq r$.

$$T = \begin{pmatrix} p_1^1 \cdots p_{N_1}^1 \; 0 \; ... \; 0 \; ... \; 0 \; ... \; 0 \\ 0 ... 0 \quad p_1^2 ... p_{N_2}^2 ... \; 0 \; ... \; 0 \\ 0 ... 0 \quad 0 \; ... \; 0 ... p_1^n ... p_{N_n}^n \end{pmatrix}, \qquad (4.1)$$

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_n = N,$$

Матриці затрат A та B, агрегуючу матрицю T у відповідності з (4.1) запишемо в клітковому вигляді

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}\, A_{12} \dots\, A_{1n} \\ A_{21}\, A_{22} \dots\, A_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n1}\, A_{n2} \dots\, A_{nn} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} B_{11}\, B_{12} \dots B_{1n} \\ B_{21}\, B_{22} \dots B_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ B_{n1}\, B_{n2} \dots B_{nn} \end{pmatrix}, \; T = \begin{pmatrix} p^1 \; 0 \dots 0 \\ 0 \;\; p^2 \dots 0 \\ 0 \;\; 0 \;\dots p^n \end{pmatrix}.$$

Для агрегування динамічного міжгалузевого балансу помножимо модель (3.1) на матрицю T зліва. Отримаємо

$$Tx = TAx + TB\dot{x} + Ty. \tag{4.2}$$

Також рівняння агрегованого балансу можна записати у вигляді:

$$X = \widetilde{A}X + \widetilde{B}\dot{X} + Y,$$

де $X = Tx$, $Y = Ty$, $\widetilde{A}$ та $\widetilde{B}$ — агреговані технологічні матриці. Або

$$Tx = \widetilde{A}Tx + \widetilde{B}T\dot{x} + Ty. \tag{4.3}$$

Рівності (4.2) та (4.3) приводять до таких умов точного агрегування:

$$\begin{cases} TA = \widetilde{A}T \\ TB = \widetilde{B}T \end{cases}. \tag{4.4}$$

Причому агреговані матриці затрат $\widetilde{A}$ та $\widetilde{B}$ матимуть вигляд:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11}\, \widetilde{a}_{12} \dots \widetilde{a}_{1n} \\ \widetilde{a}_{21}\, \widetilde{a}_{22} \dots \widetilde{a}_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \widetilde{a}_{n1}\, \widetilde{a}_{n2} \dots \widetilde{a}_{nn} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_{11}\, \widetilde{b}_{12} \dots \widetilde{b}_{1n} \\ \widetilde{b}_{21}\, \widetilde{b}_{22} \dots \widetilde{b}_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \widetilde{b}_{n1}\, \widetilde{b}_{n2} \dots \widetilde{b}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Якщо записати умови (4.4) у явному вигляді, то для першого рівняння цієї умови отримаємо такі рівності:

$$
\begin{array}{l}
p^1 A_{11} = \widetilde{a}_{11} p^1,\; p^1 A_{12} = \widetilde{a}_{12} p^2, \ldots,\; p^1 A_{1n} = \widetilde{a}_{1n} p^n, \\
p^2 A_{21} = \widetilde{a}_{21} p^1,\; p^2 A_{22} = \widetilde{a}_{22} p^2, \ldots,\; p^2 A_{2n} = \widetilde{a}_{2n} p^n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p^n A_{n1} = \widetilde{a}_{n1} p^1,\; p^n A_{n2} = \widetilde{a}_{n2} p^2, \ldots,\; p^n A_{nn} = \widetilde{a}_{nn} p^n.
\end{array}
\qquad (4.5)
$$

Враховуючи умову додатності всіх векторів цін, $p^s > 0,$ $s = \overline{1, n},$ приходимо до висновку, що

$$\widetilde{a}_{ss} = \lambda_{A_{ss}},\; p^s = p_{A_{ss}},\; s = \overline{1, n}. \qquad (4.6)$$

Тобто, що діагональні елементи агрегованої матриці $\widetilde{A}$ повинні бути коренями Фробеніуса діагональних клітинок деталізованої матриці $A,$ а відповідні вектори цін — їх лівими векторами Фробеніуса.

Застосувавши аналогічні міркування для другого рівняння системи (4.4), отримаємо:

$$\widetilde{b}_{ss} = \lambda_{B_{ss}},\; p^s = p_{B_{ss}},\; s = \overline{1, n}. \qquad (4.7)$$

Іншими словами, діагональні елементи агрегованої матриці $\widetilde{B}$ повинні бути коренями Фробеніуса діагональних клітин деталізованої матриці $B,$ а відповідні вектори цін — їх лівими векторами Фробеніуса.

Умову точного агрегування (4.5) можемо записати у вигляді:

$$\left(p^s A_{sk}\right)_1 : \left(p^s A_{sk}\right)_2 : \ldots : \left(p^s A_{sk}\right)_{N_k} = p_1^k : p_2^k : \ldots : p_{N_k}^k.$$

Відповідна умова, отримана з другого рівняння системи (4.4), запишеться у вигляді:

$$\left(p^s B_{sk}\right)_1 : \left(p^s B_{sk}\right)_2 : \ldots : \left(p^s B_{sk}\right)_{N_k} = p_1^k : p_2^k : \ldots : p_{N_k}^k$$

$$s = 1, 2, \ldots, n;\; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Підсумовуючи результати отримані в рівностях (4.6), (4.7), можна зробити висновок:

Твердження 6: *Необхідною і достатньою умовою точного агрегування моделі динамічного міжгалузевого балансу з* N *- до* n *-вимірного рівняння* $(1 < n < N)$ *є вимога, щоб у всіх* n *частинних агрегуваннях питомі матеріальні витрати галузей на виробництво були пропорційні питомим витратам на розширення виробництва галузей і ціні відповідної продукції.*

5. Розглянемо двоїсту модель до моделі міжгалузевого балансу у вигляді

$$p = pA + r, \tag{5.1}$$

де p — вектор цін на продукцію, A — технологічна матриця моделі Леонтьєва, r — вектор доданої вартості.

Нехай для моделі (5.1) потрібно розв'язати задачу агрегування в єдиний продукт. Для цього введемо у розгляд агрегуючий вектор-стовпець $T = (x_1, x_2, ..., x_N)^T$, де x_i — обсяги випусків i-ї продукції. Помножимо рівняння (5.1) на агрегуючий вектор T справа. Отримаємо

$$pT = pAT + rT. \tag{5.2}$$

Покладаючи, що $pT = P,\ rT = R$ — агреговані показники, рівняння (5.2) можна записати у вигляді

$$P = P\widetilde{a} + R,$$

або

$$P = pT\widetilde{a} + R. \tag{5.3}$$

Порівнюючи рівності (5.2) та (5.3) отримуємо умову точного агрегування

$$AT = T\widetilde{a}. \tag{5.4}$$

Можемо записати останню умову так:

$$\left(A - \widetilde{a}E\right)T = 0. \tag{5.5}$$

Для нетривіального випадку матриця A не є діагональною або нульовою. Тому виконання рівності (5.5) вимагає щоб $\widetilde{a} = \lambda_A$, тобто агрегований показник $\widetilde{a}$ дорівнює кореню Фробеніуса матриці A, та $T = x_A$, де x_A — правий вектор Фробеніуса технологічної матриці A. Отримані результати сформулюємо у формі твердження.

Твердження 7: *Для продуктивної нерозкладної моделі (5.1) завжди існує єдине точне агрегування до одновимірного рівняння* $P = P\widetilde{a} + R,\ R > 0$. *При цьому* $\widetilde{a} = \lambda_A$, $T = x_A$, *де* λ_A *та* x_A *— відповідно корінь Фробеніуса та правий вектор Фробеніуса матриці* A.

6. Розглянемо двоїсту задачу динамічного міжгалузевого балансу для цін:

$$p = pA + \dot{p}B + r, \tag{6.1}$$

де A, B — технологічні матриці, r — додана вартість споживання, $\dot{p}B$ — вартість інфляційного процесу.

Введемо у розгляд агрегуючий вектор-стовпець $T = x = (x_1, x_2, ..., x_N)^T$, де x_i — обсяги валових випусків i-го продукту.

Помножимо рівняння (6.1) на вектор-стовпець $T = x$ справа. Отримаємо таку рівність

$$px = pAx + \dot{p}Bx + rx. \tag{6.2}$$

З іншого боку, відповідний агрегований динамічний міжгалузевий баланс має вигляд

$$px = px\widetilde{a} + \dot{p}x\widetilde{b} + rx. \tag{6.3}$$

Рівності (6.2) та (6.3) дають нам умови точного агрегування моделі (6.1):

$$Ax = x\widetilde{a},$$

$$Bx = x\widetilde{b}.$$

або

$$\left(A - \widetilde{a}E\right)x = 0,$$

$$\left(B - \widetilde{b}E\right)x = 0.$$

Якщо розглядати загальний випадок, коли матриці A та B не є діагональними або нульовими, то з останніх рівностей приходимо до таких результатів. Число $\widetilde{a}$ дорівнює кореню Фробеніуса матриці A, число $\widetilde{b}$ — кореню Фробеніуса матриці B. При цьому агрегуючий вектор-стовпець $T = x_A = x_B$, де x_A та x_B — праві вектори Фробеніуса для матриць A та B відповідно. Маємо твердження.

Твердження 8: *Необхідною і достатньою умовою існування точного агрегування для продуктивної нерозкладної моделі динамічного міжгалузевого балансу цін до одновимірного рівняння* $P = \widetilde{a}P + \widetilde{b}\dot{P} + R$, $R > 0$, *де* $\widetilde{a} = \lambda_A < 1$, $\widetilde{b} = \lambda_B < 1$ *— корені Фробеніуса, є умова* $x_A = x_B$ *— рівності правих векторів Фробеніуса матриць* A *та* B. *Тоді агрегуючий вектор* $T = x_A = x_B$.

7. В економічній науці вже довгий час ведуться пошуки зв'язків між мікро- та макроекономікою. І одна з небагатьох моделей, що дозволяють наблизитися до розв'язання цієї проблеми, є модель міжгалузевого балансу. Вона дозволяє зробити перехід від аналізу на мікрорівні до макроекономічного аналізу.

Визначені у пунктах 1 та 5 умови точного агрегування для моделі Леонтьєва та двоїстої до неї моделі мають очевидний зв'язок. Задача агрегування моделі міжгалузевого балансу має розв'язок тоді і лише тоді, коли для будь-яких об'ємів валових випусків продукції x, будуть використані ціни продукції p, значення яких дорівнює лівому вектору Фробеніуса технологічної матриці A. Тоді число $\widetilde{a}$ дорівнює кореню Фробеніуса матриці A, а агрегуючий вектор T дорівнює визначеним цінам p_A.

Якщо вивчати задачу агрегування двоїстої моделі Леонтьєва, то вона матиме розв'язок тоді і лише тоді, коли для довільних цін на продукцію p будуть використані такі обсяги валових випусків x, що дорівнюють правому вектору Фробеніуса технологічної матриці A. Число $\widetilde{a}$ тоді чисельно дорівнюватиме кореню Фробеніуса матриці A, а агрегуючий вектор-стовпець матиме значення $T = x_A$.

У першому випадку умовою існування точного агрегування є рівність $T = p_A$, де p_A — ціни на продукцію, які дорівнюють лівому вектору Фробеніуса матриці A. Тобто ціни на продукцію є ключовим елементом існування розв'язку задачі агрегування при будь-яких обсягах виробництва. При цьому довільний обсяг валових випусків продукції необхідно узгодити за ціновими показниками.

У другому випадку умовою існування точного агрегування моделі Леонтьєва є рівність $T = x_A$, де x_A — обсяги валових випусків продукції, які дорівнюють правому вектору Фробеніуса матриці A. Визначенням обсягів валових випусків при будь-яких цінах є ключовим моментом у задачі агрегування. При цьому довільні ціни на продукцію необхідно узгодити за валовими випусками.

IV. Висновки. Отже, сформульовано умову точного агрегування моделі міжгалузевого балансу до одновимірного рівняння. Одержано необхідну і достатню умови існування точного агрегування. Отримані результати узагальнено на випадок агрегування міжгалузевого балансу $N \to n$, а також на випадок агрегування динамічної моделі Леонтьєва в один продукт та $N \to n$ продуктів, де $1 < n < N$. Визначено умову агрегування двоїстої моделі Леонтьєва. Поставлено питання про можливий перехід від мікро- до макроекономічних досліджень на основі використання моделі Леонтьєва.

Література

1. *Леонтьев В. В*. Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика: Пер. с англ. / Под ред. С. С. Шаталина, Д. В. Волового. — М.: Политическая литература, 1990. — 415 с.

2. *Леонтьев В. В.* Межотраслевая экономика. — М.: ОАО «Издательство «Экономика», 1997. — 479 с.

3. Итеративное агрегирование и его применение в планировании / Под ред. Л. М. Дудкина. — М.: Экономика, 1979. — 328 с.

4. *Пономаренко О. І., Перестюк М. О., Бурим В. М.* Основи математичної економіки. — К.: Інформтехніка. 1995. — 320 с.

УДК: 657.6.004.05

С. Ф. Лазарєва, канд. екон. наук,
професор кафедри інформаційного менеджменту,
Р. Л. Ус, аспірант,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

ІТ-АУДИТ ЯК ІНСТРУМЕНТ З АРСЕНАЛУ АНТИКРИЗОВИХ ЗАХОДІВ ПІДПРИЄМСТВ

АНОТАЦІЯ. Стаття присвячена ІТ-аудиту. Наведено класифікацію видів ІТ-аудиту залежно від задач, які повинні бути вирішені. Розглянуто основні ІТ-ризики, на які наражаються підприємства, що застосовують ІТ у повсякденній діяльності. Розглянуто міжнародні стандарти і підходи, на яких основуються методики проведення ІТ-аудиту. Обґрунтовано зростаючу необхідність застосування ІТ-аудиту на підприємствах в умовах науково-технічного прогресу, і особливо в умовах світової економічної кризи.

ANNOTATION. Article is dedicated to IT-audit. Described a classification of IT-audit kinds according to tasks, those have be done. Previewed main IT-risks, those impend to companies, which use IT in daily activity. Mentioned and considered international standards and approaches, for which IT-audit performance methodologies are based on. Grounded rising necessity of IT-audit using for companies in the scientific-and-technological advance environment, and especially in the world economic crisis conditions.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. ІТ-аудит, ІТ-процес, ІТ-ризик, ІТ-витрати, ІТ-консалтинг, світова економічна криза.

Нині практично жодна організація і навіть найменше підприємство не обходиться без застосування комп'ютерної техніки, програмного забезпечення, інформаційних систем різних видів, а також спеціалістів, які налаштовують їх безперебійну і зручну роботу. Internet, електронна пошта, факс, клієнт-сервер, база даних нерозривно пов'язані з господарською діяльністю сучасних компаній. Уже давно жоден бухгалтер (економіст) не створює форми фінансової звіт-