УДК 519.7

І. А. Джалладова, доцент кафедри вищої математики ФІСІТ, ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

МОДЕЛЮВАННЯ ЗМІНИ ДУМКИ ПРИ ПОВТОРНОМУ ГОЛОСУВАННІ

АНОТАЦІЯ. В роботі розглянуто задачу моделювання ситуації пов'язаної з «повторними» виборами. На основі рівняння з марковськими та напівмарковськими коефіцієнтами досліджено та проаналізовано різні ситуації.

ANNOTATION. In paper we considering problems of modeling situation about «repeat» choice. With help equations with Markov and Semi-Markov coefficients we investigation and analysys different situations.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. Марковський процес, повторні вибори, спектральний аналіз, ергодичний вектор, рішучі та нерішучі виборці.

Ситуація, коли є рішучі виборці. Доведено, що: нерішучі виборці розподілені «у середньому» пропорційно рішучим виборцям. А також, що наполеглива меншість візьме гору зрештою над коливною більшістю.

Ситуація, коли усі виборці нерішучі. В цьому випадку встановиться одностайність, і вона буде поглинаючою. Модель може бути використана для порівняння з даними, отриманими з реальних ситуацій, таких, як вибори в академію чи навіть політичні вибори, що проводяться у відповідності зі спеціальними припущеннями.

На базі основних сценаріїв розвитку подій можна скласти прогнозування результатів повторних виборів, а також тривалості процесів, через які можна досягнути бажаного результату.

1. Постановка задачі

Припускаємо, що ν виборцям пропонують зробити вибір з деякої множини ω, що містить щ можливих варіантів.

Вважаємо, що кожний з ν виборців повинен зробити тільки один вибір. Зрозумило, що існує ω^ν різних можливих варіантів виборів. Кожен варіант характеризує *певний стан суспільної думки*, що з'ясовується під час підрахунку голосів.

У багатьох процедурах (ймовірно, у більшості) ми не цікавимося станом суспільної думки, а лише чисельним його виразом, тобто числом голосів на користь того чи іншого вибору.

Якщо позначити різні вибори натуральними числами від 1 до ω, то кожний (виражений числом) стан суспільної думки можна характеризувати числом ν_1 виборців, що зробили вибір 1,

© І. А. Джалладова, 2009

«	ν_2	«	«	«	2,
«	ν_3	«	«	«	3,
«	ν_ω	«	«	«	ω,

тобто за допомогою цілих додатних чисел, сума яких дорівнює ω. Це важливо для обчислення кількості можливих апріорі станів. Легко показати, що є таких станів.

$$\frac{(\omega-1+\nu)!}{(\omega-1)!\,\nu!}=\binom{\omega-1+\nu}{\omega-1}.$$

Наприклад, якщо число виборців ω = 7 і кількість виборів ν = 3, то існує $\binom{9}{2}$ = 36 можливих станів; зрозуміло, що число всіх можливих станів $3^7 = 2187$. Нижче ми розглянемо особливий випадок, коли ν = 2; при цьому буде точно ω + 1 можливих станів.

Мета дослідження: «знайти більшість» на користь окремого вибору; будемо вважати, що цей вибір зроблений групою.

Слово «більшість» має різний сенс залежно від домовленостей, прийнятих із приводу виборів. У деяких випадках можна вважати, що думка *n* приймається, якщо за неї отримано більше голосів, ніж для будь-якої іншої думки. Це правило відносної більшості. В інших випадках вважається, що обрано думку *n*, якщо ця думка зібрала більше голосів, ніж всі інші, разом узяті; це так зване правило абсолютної більшості. Можна також підсилити правило абсолютної більшості за додаткових умов: деяка думка вважається прийнятою, якщо вона зібрала визначену «критичну» частину (понад половину) голосів, часто дві третини, іноді навіть 100 %. Це так звана кваліфікована більшість. Інше правило більш слабке, ніж правило абсолютної більшості; воно вимагає деякого критичного числа голосів, що може складати менше половини всіх голосів, але при цьому потрібно узгодження цієї умови з наявністю правила відносної більшості.

Два типи формальних причин можуть перешкоджати дослідженню, що має метою одержання більшості голосів. Причини *першого типу* пов’язані з випадком, коли ω мале; при цьому іноді важко одержати навіть відносну більшість, оскільки виникають ситуації, коли два чи більше вибори «лідирують», але мають рівне число голосів. Тоді доводиться вдаватися до допомоги жереба чи використовувати правило переваги відповідно до допоміжного критерію (таким, наприклад, як вік, якщо проводиться вибір між кандидатами на деяку посаду). Причини *другого типу*, що виникають через більш серйозні труднощі, мають місце головним чином тоді, коли існує багато виборів, і вони обумовлені можливістю появи такої ситуації, коли жоден з виборів не одержує достатню кількість голосів вище критичного рівня, установленого правилом. Так, наприклад, у випадку абсолютної більшості ризик подібного типу зростає при числі виборів більше двох і існує навіть при $\nu = 2$, якщо, наприклад, критична частка голосів складає дві третини (крім, звичайно, особливого випадку, коли є всього три виборці).

При відсутності достатньої більшості, голосування повторюється. (Є інші шляхи: наприклад, можна допустити навіть обов'язково вносити зміни в множину Ω виборів, пропонованих виборцям.) *Це є процедура «повторного голосування».*

Число наступних один за одним голосувань іноді строго обмежено самим правилом голосування, яке встановлює, що максимальне число голосувань повинне бути N і що у випадку, якщо необхідна більшість не досягнута при N турах голосування, повинне бути зроблене те чи інше зниження необхідної більшості чи голосування проводиться знову через деякий час. Але іноді правило не обмежує число турів голосування, поки не буде зроблений визначений вибір. Тоді тури голосування продовжують випливати один за одним. Цього посилання ми будемо дотримувати надалі, якщо не буде зроблено ніякого застереження.

Використання методу повторних голосувань засновано, на переконанні того, що результати виборів будуть змінюватися від одного туру до іншого, що неодноразово підтверджувалося практично.

Найважливіші зміни пов'язані з кількісними результатами, що повідомляються після голосування, і особливо з тим впливом, що ця інформація про «суспільну думку», вираженому в попередньому голосуванні, робить на виборця, коли він складає свою власну думку.

Для побудови моделі покладаємо наступне: сукупність з v виборців складається з двох категорій виборців, яких ми будемо називати «рішучими» і «нерішучими»; число останніх буде s, а перших $\omega - s$. Ми вважаємо, що рішучі виборці ніколи не змінюють своїх думок і голосують однаково при кожному турі голосування.

Якщо щ = 2, то буде зручно позначити через 0 і 1 два вибори, а через r ж r' позначити число рішучих прихильників відповідно виборів 0 і 1, так що:

$$r + r' = \nu - s\,.$$

Що стосується нерішучих виборців, то їхній вибір обумовлений у відомій мірі випадковими факторами, тобто має деяку імовірність, що дорівнює відношенню кількості голосів, поданих у попередньому турі голосувань за відповідну думку до загального числа, що брали участь у голосуванні.

Проілюструємо сказане чисельно. Припустимо, що є 13 виборців ($\omega = 13$) і думки 0 і 1 зібрали відповідно 9 і 4 голосу (стан (9,4), якщо прийняти звичайні позначення). Тоді *кожний з нерішучих виборців* буде голосувати на користь думки 0 з імовірністю $^9/_{13}$ і на користь думки 1 з імовірністю $^4/_{13}$. Тоді можливо 14 станів, але усі вони не будуть мати місця, якщо припустити наявність рішучих виборців. Якщо, наприклад, є 3 рішучих прихильника думки 0 й два рішучих прихильники думки 1 (r = 3, r' – 2), то залишається (s = 8) нерішучих виборців і тому тільки (s + l = 9) можливих станів, починаючи від стану (11,2), коли всі нерішучі будуть голосувати за 0, і закінчуючи станом (3,10), коли всі нерішучі будуть голосувати за думку 1.

Зауваження. Для зручності приймемо спрощені позначення для різних можливих станів, вказуючи тільки кількість нерішучих виборців, що голосують на користь думки 0. Таким чином, у зазначеному вище прикладі (н = 13, r = 3, r' = 2) замість того, щоб говорити про стан (9,4), ми будемо говорити про стан (6); таке позначення варто розуміти як більш зручне. При даному голосуванні число j ніколи не має місця, так само як і число $j' = s - j$ і навіть сума s не зустрінеться; зустрінеться тільки $j + r$ і $j' + r'$ (тут 9 і 4), сума яких н (тут 13) відома.

2. Аналітичне визначення процесу

Сформульовані вище умови означають, що послідовність голосувань є марковским процесом з $s + 1$ можливими станами. Цей процес, визначається квадратною матрицею М ймовірностей переходу (p_{ij}) зі стану (j) у стан (i). Будемо вважати, що індекс i визначає — номер рядка, а індекс j — номер стовпця, так що сума елементів кожного стовпця дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=0}^{s} p_{ij} = 1 \;\; (j = 0, 1, \ldots, s). \qquad (1)$$

Якщо мав місце стан (j), то кожний з нерішучих виборців буде голосувати на користь думки 0 з імовірністю ($j + r$)/н і на користь думки 1 з імовірністю ($j' + r'$)/ ω (їхня сума дорівнює 1). При цих умовах імовірність того, що думка 0 одержить i голосів, поданих нерішучими виборцями, дорівнює величині p_{ij}, що визначається біноміальним законом $i' = s — 1$:

$$p_{ij} = \frac{s!}{i!i'!}\left(\frac{i+r}{\nu}\right)^{i}\left(\frac{j'+r'}{\nu}\right)^{i'} \text{ або } p_{ij} = \frac{s!}{\nu^{s}}\frac{(j+r)^{i}(j'+r')^{i'}}{i!i'!}. \qquad (2)$$

Таким чином, матриця M цілком визначена. Якщо ми позначимо через P_N вектор-стовпець, компоненти якого є ймовірностями різних станів після N турів голосування, то одержимо

$$P_{N+1} = MP_N.$$

Щоб цілком визначити вектор-стовпець, потрібно ввести «початкові умови» як вектор P_0, що дозволить нам написати рівність:

$$P_N = M^N P_0.$$

Вектор P_0 можна інтерпретувати в такий спосіб.

1. Якщо ми стежимо за процесом із самого початку, то будемо вважати, що числа 1, 2, ... , N номера турів голосування, а 0 — номер тільки що закінченого голосування. Результатом останнього голосування є деякий стан (j_0). Вектор P_0 має один компонент, рівний 1, яка відповідає стану (j_0), а всі інші компоненти цього вектора рівні 0 (чистий початковий вектор).

2. Тут не може бути «нульового» голосування, ПР-технології до початку виборів можуть створювати такі психологічні умови, при яких складається враження, що голосування проходило, наприклад, за допомогою «оголошення» стану (j_0). У такому випадку всі компоненти вектора P_0 будуть рівні 0, крім однієї, рівної 1 і стосовної до стану (j_0).

3. На додаток до цього можна уявити собі, що мається кілька технологій, кожна з який створює «чистий початковий вектор» попереднього типу. Якщо ми припустимо, що нерішучі виборці знаходяться під випадковим впливом різних технологій до першого голосування, імовірність одержати інформацію, що рекламує стан (j_0), дає інтерпретацію компонента вектора P_0, що відноситься до стану (j_0) (змішаний початковий вектор).

3. Поняття спектрального аналізу

1. Нехай M — матриця, що містить (s + 1) рядків і (s + 1) стовпців, матриця M^N може бути знайдена шляхом обчислення матриці Д^N (N-го степеня матриці Д), де Д — матриця, *подібна* M. Кажуть, що матриця Д подібна матриці M, якщо можна знайти таку обернену матрицю A, що буде мати місце рівність

$$M = A^{-1}\Delta A. \tag{3}$$

Тоді для будь-якого цілого додатного числа N справедлива рівність

$$M^N = A^{-1}\Delta^N A. \tag{4}$$

Це перетворення подоби виявляється особливо корисним у тому випадку, коли серед матриць, подібних M, є діагональна матриця Д. Нехай діагональними елементами цієї матриці будуть числа $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$, всі інші елементи — нулі. Але тоді матриця Д^N є діагональною й елементами головної діагоналі її є числа λ_0^N, . . ., λ_s^N. Нехай (L_0, L_1, ..., L_s) — сукупність рядків матриці A, а (C_0, C_1, ..., C_s) —сукупність стовпців матриці A^{-1}. Тоді з формули (4) легко одержати

$$M^N = \lambda_0^N C_0 L_0 + \lambda_1^N C_1 L_1 + ... + \lambda_s^N C_s L_s. \tag{5}$$

2. Всі обчислення, необхідні для подання матриці у формі (3), звичайно називаються *спектральним аналізом* [3, 7]; якщо вони приводять до діагональної матриці (це буває часто, але не завжди), то кажуть, що матриця *M зведена до діагонального виду*. Матриці M, що розглядаються нижче, завжди мають цю властивість. Рівність (3) можна записати також у наступному виді:

$$AM = ДA \text{ або } MA^{-1} = A^{-1}Д.$$

Ці два співвідношення у випадку, коли Д — діагональна матриця, дають s + 1 рівностей відповідно для векторів-рядків

$$L_R M = \lambda_R L_R \qquad (k = 0, 1, ..., s) \tag{6}$$

і для s + 1 векторів-стовпців

$$MC_R = \lambda_R C_R \qquad (k = 0, 1, ..., s). \tag{7}$$

Вектори L_R (k = 0, 1, ..., s), що утворюють сукупність s + 1 незалежних вектор-рядків, називаються *характеристичними век-*

тор-рядками матриці M, аналогічно $s+1$ незалежних векторів-стовпців C_R називаються *характеристичними вектор-стовпцями* матриці M. Характеристичні вектори є векторами, результат множення яких як на матрицю M, так і на число λ_R той самий. Числа λ_R називаються власними значеннями (спектральними чи характеристичними числами); разом вони складають спектр матриці M.

3. Метод спектрального аналізу полягає в знаходженні спочатку власних значень шляхом розв'язування рівнянь (з невідомим λ), що називається характеристичним рівнянням і виходить з умови, що матриця $M-\lambda I$ (I — одинична матриця) є виродженою. Цей метод не може бути легко застосований до матриць M, з якими ми маємо справу. Властивості елементів (p_i^j) матриці M дозволяють нам обчислювати вектори L_R і відповідні їм власні значення $л_R$ одночасно.

Матриці переходу марківского випадкового процесу (стохастичні матриці) характеризуються тим, що всі їхні елементи невід'ємні і сума елементів кожного стовпця дорівнює 1. Усі ці матриці мають з погляду спектрального аналізу деякі специфічні властивості, з яких особливо корисні наступні ([4]):

а) Немає власних значень, модуль яких більше 1.

б) Ціле число 1 саме завжди є власним значенням — іноді простим, іноді кратним.

в) Нехай $\lambda = 1$ — просте власне значення і нехай, крім того, модулі всіх інших власних значень менше 1. Тоді з рівності (5) випливає, що при $N \to \infty$ матриця M^N збігається до C_0L_0, а $P_N = M^N P_0$ збігаються до $C_0L_0P_0$. Але ми можемо вважати, що L_0 є вектор-рядок, чиї компоненти рівні 1, тому що ми маємо $L_0M = L_0$ ($= 1 \times L_0$) у силу властивостей сум стовпців матриці M. Тому $L_0P_0 = 1$ незалежно від того, якім є P_0 (елементами P_0 служать імовірності, сума яких дорівнює 1) і P_N збігається до C_0 незалежно від P_0. Існує тому вектор C_0 що визначає граничний розподіл ймовірностей, до якого вектори ймовірностей збігаються при $N \to \infty$; цей граничний розподіл не залежить від вибору P_0.

Якщо цей факт має місце, то граничний вектор C_0 (він є характеристичним вектором-стовпцем, що відповідає власному значенню $\lambda_0 = 1$) є ергодичним вектором, а сам процес — ергодичним. Ергодичний процес дає нам можливість, якщо ми маємо на увазі досить далеке майбутнє, одержати імовірнісний прогноз, що практично не залежить від того, що відомо в даний час.

Спектральні властивості процесу. Повернемося до ймовірності p_{ij}, що пов'язує стан (j) зі станом (i)

$$p_{ij} = \frac{s!}{\nu^s} \frac{\left(j+r\right)^i}{i!} \frac{\left(j'+r^1\right)^{i'}}{i'!}, \tag{7}$$

$$i + i' = j - j' = s,$$

і покажемо, що вони задовольняють тотожностям, що дозволяють дати спектральний аналіз матриці *M*. Будемо використовувати коротке позначення для «факторіальних багаточленів» і вмовимося, що для кожного цілого додатного числа n має місце

$$(x)_n = x\left(x-1\right)\ldots\left(x-n+1\right) \tag{8}$$

і що $(x)_0 = 1$ і $(x)_1 = x$.

1. Спочатку доведемо, що для кожного цілого k, такого, що $0 \le k \le s,$ будемо мати

$$\sum_{i=0}^{s} (i)_R\, p_{ij} = \frac{(s)_R}{\nu^R}\left(j+r\right)^R. \tag{9}$$

У лівій частині рівності (9) присутні тільки члени з номерами і, такими, що $k \le i \le s$, тому що $(i)_R = 0$ при $i = 0, 1, \ldots, k - 1$ у силу вираження (8). Крім того, помітимо, що при $i \le k$ мають місце рівності

$$\frac{(i)_R}{i!} = \frac{1}{(i-k)!} \text{ і } (j+r)^i = (j+r)^{i-R}(j+r)^{i-R},$$

так що

$$\sum_{i=0}^{s} (i)_R\, p_R^j = \frac{s!}{\nu^s}\left(j+r\right)^R \quad \sum_{i-R=0}^{s-R} \frac{(j+r)^{i-R}(j'+r)^{i'}}{(i-k)!\,i'!}.$$

В останній сумі покладемо: *i – k = б*, *i' = б'* при *б + б' = s – k*, щоб спростити запис; тоді останню суму можна записати так:

$$\frac{1}{(s-k)!}\sum_{\alpha=0}^{s-R} \frac{(s-k)!}{\alpha!\alpha'!}(j+r)^{\alpha}(j'+r')^{\alpha'}.$$

Отримана сума дорівнює $\nu^{s-R}/(s-k)!$ по біноміальній формулі, де $(j + r) + (j' + r') = \omega$. Остаточно будемо мати

$$\sum_{i=0}^{s} (i)_R\, p_i^j = \frac{s!}{\nu^s}(j+r)^R \frac{\nu^{s-R}}{(s-k)!}$$

та, з огляду на те, що $s!/(s-k)! = (s)_R$, одержимо

$$\sum_{i=0}^{s}(i)_R\, p_i^j = \frac{(s)_R}{\nu^R}(j+r)^R.$$

Помітимо, що тут k — будь-яке ціле число, що задовольняє умові $0 \le k \le s$. Таким чином, рівність (9) установлене для $s + 1$ різних значень k. Зокрема, при $k = 0$ ми знову приходимо до рівності (1).

2. Рівність (9) дає можливість знайти сукупність многочленів від невідомих:

$$L_0(x), L_1(x), ..., L_R(x), ..., L_s(x),$$

що мають наступні властивості: степінь кожного багаточлена дорівнює його індексу, коефіцієнт старшого члена дорівнює 1.

Тобто $L_1(x) = x + B,\ L_2(x) = x^2 + Cx + D$ і т.п., де коефіцієнти *B, C, D*, ... повинні бути обрані так, щоб задовольняти рівняння (10). Ці багаточлени можна визначити послідовно, починаючи з $L_0(x) = 1$. Наприклад, поклавши $L_1(x) = x + B$ і використовуючи рівняння (10), одержимо

$$\sum_{i=0}^{s}(i+B)p_{ij} = \frac{s}{\nu}(j+B),$$

звідки

$$\sum_{i=0}^{s} i\, p_i^j + B\sum_{i=0}^{s} p_i^j = \frac{sj}{\nu} + \frac{sB}{\nu}.$$

Рівність (9) дає

$$\sum_{i=0}^{s} i\, p_i^j = \frac{s}{\nu}(j+r) \quad \text{і} \quad \sum_{i=0}^{s} p_i^j = 1,$$

так що

$$\frac{rs}{\nu} = \frac{s}{\nu}B - B, \quad B = \frac{-rs}{\nu - s},$$

і, остаточно,

$$L_1(x) = x - \frac{rs}{\nu - s}.$$

Обчислення коефіцієнтів будь-якого многочлена $L_R(x)$, хоча і вимагає для цього чимало часу, завжди можна зробити, використовуючи рівність (9).

Остаточно будемо мати $s + 1$ різних власних значень (де в загальному випадку $s < н$)

$$1, \frac{s}{\nu}, \frac{s(s-1)}{\nu^2}, ..., \frac{s!}{\nu^s}.$$

Елементи відповідних характеристичних векторів-рядків можна обчислити, надаючи невідомому x у $L_R(x)$ по черзі різні значення 0, 1, ..., s.

Обчисливши характеристичні вектор-рядки, можна, якщо це необхідно, знайти характеристичні вектори-стовпці C_R, або знаходячи матрицю A (сама матриця A утворюється з векторів L_0, L_1, ..., L_s), або розв'язуючи рівняння (7), у якому нам відомі числа $л_R =$ $= (s)_R / \omega^R$.

Випадок, коли є рішучі виборці. Це загальний випадок, що характеризується строгою нерівністю $s < v$. Число 1 є простим власним значенням, а інші власні значення укладені строго між 0 і 1; вище ми бачили, що ця умова достатня, щоб процес був ергодическим.

У нашому випадку ергодичний вектор $E = (E_0, E_1, ..., E_i, ..., E_s)$ має невід'ємні компоненти, однозначно обумовлені із системи рівнянь

$$\sum_{j=0}^{s} p_i^j E_j = E_j (i = 0, 1, ..., s), \tag{11}$$

$$\sum_{j=0}^{s} E_j = 1. \tag{12}$$

Тут E_i — гранична ймовірність кандидата 0 (коли N дуже велике), що набирає і голосів при N-у балотуванні, які б не були початкові умови.

1. Припустимо спочатку, що числа r і r' невід'ємні (тобто кожна альтернатива має хоча б одного рішучого прихильника.) З рівності (2) ясно, що жодне з чисел p_{ij} не може дорівнювати нулю. Тому жодне з чисел N_i не може виявитися рівним нулю, тому що якщо $E_i = 0$, то з рівності (11) випливає, що всі Ej повинні бути нулями, що суперечить рівності (12).

Звідси кожний із реалізованих станів має невід'ємну ергодичну ймовірність, тобто буде, безсумнівно, мати місце в кінцевому рахунку, якщо голосування продовжується необмежено. Припустимо, зокрема, що правило виборів вимагає достатнє число турів голосування, щоб одна з альтернатив 0 и 1 зібрала, скажемо, більш двох третин голосів; щоб це стало можливим, необхідно, щоб більше із відношень $(r+s)/\ \omega$ і $(r'+s)/\ \omega$ було рівним чи перевищувало дві третини. Ми знаємо тепер, що це досить також для того, щоб процес мав кінцеву довжину (кінцеве число турів голосування); математичне сподівання шуканої величини можна обчислити.

У підсумку, якщо голосування продовжується необмежено, різні можливі стани (i) будуть випливати один за одним і повторюватися. Проте, якщо після N турів голосування ми обчислимо середнє значення числа нерішучих виборців, що вибрали думку 0, тобто $(i_1 + i_2 + \ldots + i_N)/N$, то знайдемо, що ця випадкова величина прямує до деякого визначеного значення

$$e = \sum_{i=0}^{s} iE_i. \tag{13}$$

Хоча в загальному випадку e не буде цілим числом, так само як і $e' = s - e$, можна вважати, що e визначає «середній стан», чи, іншими словами, що e та e' визначають «середній розподіл» виборців, що коливаються при виборі думок 0 та 1.

Відзначимо наступний цікавий факт: числа e та e' пропорційні r і r', тобто нерішучі виборці розподілені «у середньому» пропорційно рішучим виборцям. Справді, ми маємо

$$e = \sum_{i=0}^{s} iE_i = \sum_{i=0}^{s}\left(i\sum_{j=0}^{s} p_i^j E_i \right) = \sum_{j=0}^{s}\left(\sum_{i=0}^{s} i\, p_i^j \right) E_j.$$

Тепер вираз у круглих дужках завдяки співвідношенню (10) дорівнює $\frac{s}{\nu}(j+r)$, звідки

$$e = \sum_{j=0}^{s} \frac{s}{\nu}(j+r)E_j = \frac{s}{\nu}\sum_{j=0}^{s} jE_j + \frac{sr}{\nu}\sum_{j=0}^{s} E_j.$$

Використовуючи рівняння (13) та (12), отримаємо

$$e = \frac{se}{\nu} + \frac{sr}{\nu},$$

$$e = \frac{rs}{\nu - s}.$$

Так як $e' = s - e$, то

$$e' = \frac{r's}{\nu - s},$$

що ми і стверджуємо.

2. Тепер припустимо, що одна з альтернатив, скажемо 1, має рішучих прихильників ($r = 0$, $r' \neq 0$), у той час як інша альтернатива, 0, не має таких і, таким чином, може з'явитися як тимчасовий вибір нерішучих виборців.

У стовпці 0 матриці M будемо мати

$$p_0^0 = 1 \text{ та } p_i^0 \text{ для } i \neq 0.$$

Стан (0), що виражає єдність на користь думки 1, є «поглинаючий стан»: за умови випадковості він повинен повторюватися необмежено в силу наших припущень.

Процес не перестане бути ергодичним, але компонента E_0 ергодичного вектора дорівнює 1, а всі інші компоненти дорівнюють нулю.

Єдність на користь думки 1 несумнівна в кінцевому рахунку навіть тоді, коли $r' = 1$ незалежно від того, яке було розташування до вибору думки 1 у початковому стані. Таким чином, наполеглива меншість візьме гору зрештою над коливною більшістю.

Випадок, коли усі виборці нерішучі. Розглянемо спеціальний випадок, коли $r = r' = 0$ ($v = s$). Спектральний аналіз залишається застосовним, за винятком того, що власні значення 1 і s/v не будуть різними. Число 1 тепер є власним значенням кратності 2, і є $s - 1$ інших власних значень

$$\frac{s-1}{s},\ \frac{(s-1)(s-2)}{s^2},\ \dots,\ \frac{(s-1)!}{s^{s-1}}.$$

Проте і в цьому випадку матрицю M можна привести до діагонального виду, тому що є два незалежних вектори-рядки:

$$L_0 = [1\ \ 1\ \ 1 \dots\ 1],$$

$$L_1 = [0\ \ 1\ \ 2\ \dots\ s],$$

і ці вектори є характеристичними; кожний з них відповідає власному значенню 1. Помітимо, що для перебування компонентів вектора L_1 досить з рівності (10) при $k = 0$, $k = 1$ і $r = 0$ знайти $L_1(x) = x$.

Крім того, $p_0^0 = p_s^s = 1$; стовпець 0 матриці M складається з однієї одиниці, за якої слідують нулі; останній елемент s-го стовпця матриці M дорівнює 1, а всі попередні елементи рівні 0. Кожен вектор-стовпець з $s + 1$ компонентами, з яких тільки перша й остання відмінні від нуля, є характеристичним вектором-стовпцем, що відповідає власному значенню 1. Зокрема, перші два стовпці C_0 і C_1 матриці A^{-1}, що можуть бути знайдені з чотирьох умов

$$L_0C_0 = L_1C_1 = 1 \text{ та } L_0C_1 = L_1\, C_0 = 0,$$

будуть

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad C_1 = \begin{pmatrix} -1/s \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1/s \end{pmatrix}.$$

Коли N необмежено зростає, M^N у силу рівності (5) прямує до $C_0L_0 + C_1L_1$ і $P_N = M^N P_0$ прямує до

$$C_0L_0P_0 + C_1L_1P_0 = C_0 + C_1\,(L_1P_0).$$

Але L_1P_0 має просту інтерпретацію. Якщо, наприклад, P_0 — «чистий початковий вектор», єдиний ненульовий компонент якого є (i_0), то $L_1P_0 = i_0$. Тоді P_N прямує до $C_0 + i_0C_1$, до вектора-стовпця, перший і останній компоненти якого (всі інші нулі) рівні відповідно

$$1 - \frac{i_0}{s} \quad \text{та} \quad \frac{i_0}{s}. \tag{14}$$

Остаточно, в цьому випадку встановиться одностайність, і вона буде поглинаючою. Але відсутність ергодичності (оскільки число 1 є власне значення кратності) робить характер єдності— альтернатива яка буде обрана,— передбачуваним тільки в термінах імовірності і залежить від «початкового вектора». Математичне сподівання величини (14) завжди пропорційно числу голосів, що вони тільки що зібрали. Це можна тлумачити таким чином, що думки 0 і 1 досягнуто кінцевої єдності.

Ймовірна тривалість процесу. У деяких марківських випадкових процесах довільну частину безлічі можливих станів можна розглядати як два взаємно додаткових класи станів, що називаються «продовжуючимі станами» і «припиняючимися станами», і можна запитати: яке число кроків необхідно, щоб з даного стану, що продовжується, досягти деякого стану, що припиняється?

Загальне рішення задачі одержати неважко: відповідні умови можна знайти, наприклад, у роботі Кемени і Снелла [9]. Нехай S_c — безліч станів, що продовжуються, і нехай (j) таке, що (j) $\in$ S_c. Нехай s_j — математичне сподівання числа кроків, необхідних, щоб досягти спочатку припиняємого стану. Тоді ясно, що

$$s_j = 1 + \sum_{(i)\in s_c} p_i^j s_i.$$

Цей факт можна записати за допомогою матриць, уводячи підматрицю M_c матриці M_s, що відповідає станам, що продовжуються; вектор-рядок S відповідає s_j, а вектор-рядок H має усі компоненти, рівні 1; I — одинична матриця:

$$S = H + SM_c,$$

звідки

$$S\,(I - M_c) = H \text{ і } S = H\,(I - M_c)^{-1}.$$

Цей результат дозволяє проводити обчислення (виходячи з деякого початкового продовжуючого стану) очікуваної тривалості процесу незалежно від того, яке правило зупинки прийняте .

Приклад 1. Відповідно до позначень v = 7, *щ* = 2, r = 2, r' = 1, (s = 4).

Рядки і стовпці матриці M дають п’ять можливих станів: (0), (1), (2), (3), (4), що відповідають оголошеним результатам: (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1).

$$M = \frac{1}{2401}\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 625 & 256 & 81 & 16 & 1 \\ 1000 & 768 & 432 & 160 & 24 \\ 600 & 864 & 864 & 600 & 216 \\ 160 & 432 & 768 & 1000 & 864 \\ 16 & 81 & 256 & 625 & 1296 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}.$$

Усі власні значення прості, тому що *щ* = 2:

$$\lambda_0 = 1,\ \lambda_1 = -\frac{4}{7},\ \lambda_2 = \frac{12}{49},\ \lambda_3 = \frac{24}{843},\ \ \lambda_4 = \frac{24}{2401}.$$

Ергодичний вектор

$$E = \frac{1}{84167193}\begin{pmatrix} 2 & 713 & 569 \\ 10 & 320 & 040 \\ 21 & 002 & 136 \\ 28 & 404 & 256 \\ 21 & 727 & 192 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}03 \\ 0{,}12 \\ 0{,}25 \\ 0{,}34 \\ 0{,}26 \end{pmatrix}.$$

Дільник 84 167 193 є добуток виду (7—4) (49—12) (343—24) (2401—24), пов'язаний у розрахунках із множником $(1 - s/v)$ ... $(1 - s!/v^s)$.

Приклад 2. У цьому прикладі дані ті ж, що й у першому прикладі, але є наступні припущення відносно початку і закінчення: спочатку кожний з чотирьох нерішучих виборців випадково вибирає між думками 0 і 1; вибір, що першим дає «кваліфіковану більшість» у двох третин — принаймні 5 голосів,— є «кращим».

При цих умовах очікуване число турів голосування, необхідних для досягнення рішення, дорівнює 2,54..., і апріорні імовірності кінцевого вибору рівні приблизно:

0,16 для думки 1 (5 проти 2),

0,84 для думки 0 (0,66 при 5 проти 2),

(0,18 при 6 проти 1).

Приклад 3. У цьому прикладі $v = 5$, а щ — необмежено. Думка 1 має r_1 рішучих прихильників, а що залишилися $s = 5 - r_1$ виборців є нерішучими.

Очікуване число турів голосування, необхідних для досягнення єдності, якщо виходити з початкового стану, у якому жоден з нерішучих виборців не вибрав думку 1, дорівнює (для чотирьох можливих випадків):

$$r_1 = 4,\ s = 1:\ \frac{5}{5-1} = 1{,}25...$$

$$r_1 = 3,\ \ s = 2: \frac{145}{(5-2)(25-2)} = 2{,}10...$$

Висновок. З одного боку, це може бути ймовірнісний опис формальної процедури голосування, «психологічні гіпотези» якої можуть бути піддані серйозній критиці, але «технічні гіпотези» якої прийнятні і досить часто задовольняють на практиці. З іншого боку, модель може бути використана для порівняння з даними, отриманими з реальних ситуацій, таких, як вибори в академію чи навіть політичні вибори, що проводяться у відповідності зі спеціальними припущеннями.

Запропонована модель буде відразу ж відкинута в ситуації наступного типу:

деяка думка не одержала голосу в N-му турі голосування, але одержала один чи більше голосів при $(N + 1)$-му голосуванні. Добре відомо, що це іноді трапляється. Проте, якщо буде бажання при розгляді моделі, можна все-таки захистити її від таких строгих практичних перевірок, стверджуючи, що ця модель розумно підсумовує психологію поводження якщо не усіх виборців, то принаймні величезної більшості їх.

Нагадаємо, що рішучі виборці безумовно зупиняються на одному виборі і що нерішучі виборці фактично нейтральні, їх «схильність» вибрати деяку думку вимірюється ступенем її популярності, визначити їхній вибір можна тільки за допомогою імовірності. Крім цього, кожен з нерішучих виборців приймає умовно «першу думку, що приходить». Це треба розуміти так: думка, підтримана навмання узятим виборцем, має ту ж саму імовірність незалежно від того, чи узятий він з числа рішучих, чи нерішучих, чи виборців тих і інших разом.

Додамо, що абсолютна прихильність до думки є винятковим явищем і що в дійсності прихильність до визначеного вибору найбільше часто комбінується з набору станів можливого стратегічного відходу, що виникають більш-менш довільно залежно від обставин. Більш досконалими є моделі, що беруть до уваги ці складні фактори. Принципове обґрунтування розглянутої моделі полягає в тому, щоб показати можливість формалізації гіпотез деякого типу стосовно до способу, яким індивід реагує на взаємний вплив інших індивідів, і, таким чином, знайти динамічні властивості визначеного «колективного бажання».

Література

1. *Arrow K. J.* Social Choice and Individual Values (Cowles Commission Monograph 12), New York, Wiley, 1951.

2. *Back K. W*. Influence Through Social Communication, «Journal of Abnormal and Social Psychology», 46, 1951, pp. 9—23.

3. *Feller W.*, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, New York, Wiley 1960.

4. *Festinger L.* Informal Social Communication, «Psychological Review», 57, 1950, pp. 271—282.

5. *Festinger L., Schachter S.* and *Back K.* Social Pressures in Informal Groups, New York, Harper, 1950.

6. *Festinger L., Thibaut T.* Interpersonal Communication in Small Groups, «Journal of Abnormal and Social Psychology», 46, 1951, pp. 92—99.

7. *Gui1baud G. T.*, Les Theories de L'interet general et le prob-leme logique de aggregation, «Economie Appliquee, № 4., Paris, Publications de I'Universite Francois, 1952 .

8. *Hohn F.*, Elementary Matrix Alegebra. 2d ed. New York, Macmillan, 1964.

9. *Kemeny J. G.* and *Snell J. L.*, Finite Markov Chanis. Princeton, N. J., Van Nostrand, 1960.

10. *Malecot G.* Sur un probleme de probabilites en chaine que la depetique, C. R. de I'Akademie des Sciences, vol. 219 (1044) p. 379.

УДК 336.1.0018

О. І. Бабинюк, асистент кафедри вищої математики,
А. О. Харламов, студент 2 курсу, ФІСіТ,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

ЗАСТОСУВАННЯ СТОХАСТИЧНОГО ФАКТОРНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕКОНОМІКИ УКРАЇНИ В УМОВАХ КРИЗИ

АНОТАЦІЯ. За допомогою методів факторного аналізу досліджено ряди щомісячних значень деяких важливих макропоказників за 2006—2009 рр. Цей період характеризується інтенсивними змінами показників, що підсилює значущість та інтерес їх вивчення.

ANNOTATION. With help methods of factoring analysis we investigating sewes every mant data for 2006—2009 years. That's time characterscol intensive values of dates.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. Індекс споживчих цін, індекс фізичного обсягу інвестицій, методи обертання: Varimax — Варимакс; Biquartimax — Биквартимакс; Quartimax — Квартимакс; Equamax — Еквимакс.

1. Вступ: задачі факторного аналізу

Розглянемо наближену класифікацію задач факторного аналізу роботи підприємств з точки зору використання математичних методів.

При прямому факторному аналізі виявляються окремі фактори, що впливають на зміну результативного показника процесу,

© О. І. Бабинюк, А. О. Харламов, 2009