

Бандоріна Л.М.,

к. е. н., доцент, зав. каф. економічної інформатики
Національної металургійної академії України
Дніпро, Україна

Лозовський О.С.,

Аспірант кафедри економічної інформатики
Національної металургійної академії України
Дніпро, Україна

Bandorina L.,

PhD in Economics, Docent, head of the Department
of Economic Informatics
National Metallurgical Academy of Ukraine
Dnipro, Ukraine

Lozovsky A.,

postgraduate of the Department of Economic Informatics
National Metallurgical Academy of Ukraine
Dnipro, Ukraine

РОЗРОБКА ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ СТАНЦІЙ ОБСЛУГОВУВАННЯ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

DEVELOPING ECONOMICAL-MATHEMATICAL MODEL FOR OPTIMAL DISTRIBUTION OF SERVICE STATIONS IN UNCERTAIN ENVIRONMENT

Анотація. В роботі досліджена одна спеціального вигляду задача оптимального покриття або розбиття множини споживачів на зони обслуговування без обмежень на потужності станцій з відшукуванням координат центрів підмножин в умовах невизначеності.

Побудовано економіко-математичну модель оптимального розміщення станцій обслуговування з одночасним визначенням меж зон обслуговування кожною окремою станцією в умовах невизначеності для випадку, коли швидкість пересування споживача задається функцією, що залежить від рельєфу місцевості, якості дорожнього покриття, вартості палива, сезонності, виду транспорту, що використовується, та інших випадкових факторів. Також попит на послуги може бути залежним від деякої випадкової величини, для якої відомі її характеристики. Визначено критерій ефективності розбиття на сегменти обслуговування, як коефіцієнт нерівномірності навантаження по споживачам.

Побудована економіко-математична модель задачі для випадків, коли споживачі розподілені неперервно або дискретно. Зазначено, що розв'язання дискретної задачі може бути частинним випадком неперервної. Побудовано наближений детермінований еквівалент задачі для розв'язання, за допомогою введення характеристичних функцій підмножин споживачів, розроблено алгоритм її розв'язання.

Запропоновано критерій ефективності розбиття на сегменти обслуговування, що визначається як коефіцієнт нерівномірності навантаження по споживачам.

Побудовану модель можна використовувати для розв'язання задач розміщення поштових відділень, магазинів, що реалізують товари першої необхідності, планування місць розмітки пішохідних переходів, розміщення пунктів утилізації побутових відходів та інших об'єктів, а також визначення меж обслуговування цими об'єктами. Для цього необхідно проведення додаткових досліджень, зібрати та статистично обробити додаткову інформацію про можливі шляхи пересування споживачів та можливі місця розміщення станцій обслуговування. Аналіз інфраструктури населеного пункту або регіону дозволить з'ясувати вузькі проблемні місця в функціонуванні різних організацій, усунення яких призведе до підвищення якості життя населення.

Ключові слова: економіко-математична модель, станція обслуговування, алгоритм, критерій ефективності розбиття, характеристична функція, випадкова величина, математичне очікування, дисперсія.

Summary. We research a particularly specified problem of optimal coverage or partitioning a set of consumers into service areas without limits on the service station yield, we determine the centers of the resulting subsets in uncertain environment.

We construct an economical-mathematical model for optimal distribution of service stations which simultaneously determines the service area of each station in uncertain environment. The model assumes consumer velocity to depend on the topography of the terrain, quality of the road surface, cost of the fuel, season of the year, type of the transportation, and other random factors. Furthermore, service demand is considered a random variable with known distribution. We define the coefficient of uneven load among the consumers as the efficiency criteria for resulting partitioning.

The model is applicable to discrete as well as continuous distribution of consumers. It is noted that solutions for discrete form of the problem are actually a partial case of the continuous solution. We approximate the deterministic equivalent of the problem by introducing characteristic functions for consumer subsets, and propose an algorithm for this problem.

We propose a criteria to measure the partitioning efficiency which is defined as the coefficient of uneven load among the consumers.

The resulting model can be applied to tasks such as placement of post offices and essential goods stores, planning the pedestrian crossings, placement of waste disposal plants and similar establishments. The model can also predict the effective service area of such facilities. This requires additional research and data on possible consumer routes and service station locations. Infrastructure analysis of a particular settlement or region should reveal inefficiency bottlenecks in various municipal operations. Elimination of the identified bottlenecks will improve the quality of life of the local population.

Keywords: economic-mathematical model, service station, algorithm, criteria of partitioning efficiency, characteristic feature, random variable, expectation, dispersion.

Вступ. В процесі розв'язанні задач розміщення станцій обслуговування виникає проблема розбиття множини споживачів на підмножини, що забезпечує виконання критерію близькості споживача до об'єкта обслуговування. При цьому необхідно визначити оптимальне розташування обслуговуючої станції для кожної підмножини обслуговування. Таку задачу зазвичай розв'язують в кілька етапів. В результаті доводиться послідовно використовувати методики сегментації з методами розміщення.

Крім того доцільно сформулювати критерії оцінки ефективності розташування станцій обслуговування та розбиття на підмножини обслуговування.

Вирішенню економічних проблем пов'язаних з питаннями оптимального розміщення підприємства присвячено багато наукових праць таких вченими, як Ізотов Д.О.[2], Стадницький Ю.І. [6, 7], Качан Є.П. [3], Ковалевський В.В. [5], Стеченко Д.М. [8] та інші.

Формулювання цілей статті. Метою даної роботи є дослідження однієї спеціального вигляду задачі оптимального покриття або розбиття множини споживачів на зони обслуговування без обмежень на потужності станцій з відшукуванням координат центрів підмножин в умовах невизначеності, коли швидкість пересування споживачів та попит на послуги залежать від деяких незалежних випадкових величин. Необхідно побудувати економікоматематичну модель задачі та розробити алгоритм її розв'язання. Також стаття має за мету встановити критерій ефективності розбиття на сегменти обслуговування за вказаних умов. Економічні проблеми розміщення станцій обслуговування можуть бути сформульовані як проблеми оптимального розбиття множини [1, 4]. Такі проблеми включають, наприклад, проблему розміщення фіксованої кількості стільникових телефонів та визначення мінімального діапазону ефективної комунікації; проблема визначення необхідної кількості стільникової станції з фіксованим ефективним радіусом і розміщення зазначених станцій; проблема визначення мінімального необхідного радіусу розповсюдження води поливної установки разом із розміщенням заздалегідь визначеної кількості цих установок в районі зрошення; завдання побудови мережі станцій громадського обслуговування; та багато інших. При вирішенні всіх цих проблем доцільно враховувати вплив випадкових факторів, оскільки в такому випадку модель буде більш адекватною дійсності.

Викладення основного матеріалу. Будемо вважати, що станції обслуговування і їх споживачі можуть розташовуватися в будь-якій точці регіону, кількість споживачів у кожній точці може бути різною.

Маємо кінцеву кількість ($m > 1$) станцій обслуговування, розташування яких наперед не відомо $\zeta_i = (\zeta_i^x, \zeta_i^y)$, $i = 1, m$, в деякій обмеженій замкненій області $S \subseteq E_2$. В точках цієї області $(x, y) \in S$ розташовані споживачі, кількість яких або необхідна кі-

лькість отримуваних послуг, задається деякою невід'ємною функцією $f(x, y, \theta_0) \geq 0$, що залежить не тільки від точки, в якій розміщений споживач, а і від деякої випадкової величини θ_0 . Швидкість пересування споживача до станції обслуговування ς_i , $i = \overline{1, m}$ задається функцією $v(x, y, \theta_i)$, що залежить від рельєфу місцевості, якості дорожнього покриття, вартості палива, сезонності, виду транспорту, що використовується, та ін., а також враховує вплив деякого випадкового фактору θ_i , $i = \overline{1, m}$. Тоді для будь-якої точки $(x, y) \in S$ мінімальний час руху з (x, y) до станції ς_i , $i = \overline{1, m}$, можна обчислити за формулою

$$t_i(x, y, \varsigma_i, \theta_i) = \inf_{p(x, y) \in P_i} \int_{p(x, y)} \frac{dp_i(x, y)}{v(x, y, \theta_i)}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

де $p(x, y) \in P_i$, $i = \overline{1, m}$, P_i – множина всіх можливих маршрутів, що з'єднують точки (x, y) і ς_i .

Необхідно розташувати станції обслуговування ς_i , $i = \overline{1, m}$, та поділити множину споживачів на m зон обслуговування $(S_1^*, \dots, S_m^*)$, тобто визначивши для кожного споживача $(x, y) \in S$, якою станцією $\varsigma_i^* \in S_i^*$, $i = \overline{1, m}$, він обслуговується, так щоб у середньому сумарний час, який необхідно витратити на шлях до своєї станції обслуговування, був мінімально можливим, тобто:

знайти $((x, y) \in S_1, \dots, (x, y) \in S_m), (\varsigma_1, \dots, \varsigma_m)$

$$E \sum_{i=1}^m \int_{S_i} f(x, y, \theta_0) t_i(x, y, \varsigma_i, \theta_i) dx dy \rightarrow \min_{((S_1, \dots, S_m), (\varsigma_1, \dots, \varsigma_m))}, \quad (2)$$

(у випадку, коли споживачі розподілені по регіону неперервно), або

$$E \sum_{i=1}^m \sum_{(x, y) \in S_i} f(x, y, \theta_0) t_i(x, y, \varsigma_i, \theta_i) \rightarrow \min_{(((x, y) \in S_1, \dots, (x, y) \in S_m), (\varsigma_1, \dots, \varsigma_m))}, \quad (3)$$

(у випадку, коли кількість споживачів ($n > m$) обмежена).

Зауважимо, що розв'язання задачі (3) можна отримати, розв'язуючи задачу (2), у якій покладемо $f(x, y, \theta_0) = 0$ для кожної точки $(x, y) \in S$, координати якої не збігаються з координатами жодного з споживачів з регіону S .

Тут і в подальшому $\theta_i = \theta_i(\Theta) : \Theta \rightarrow R, i = \overline{0, m}$, – випадкові величини на ймовірному просторі $(\Theta, \mathfrak{F}, P)$ з відомими обмеженими математичними очікуваннями і дисперсіями, при чому пари (θ_l, θ_k) , для всіх $l, k = \overline{0, m}$, – незалежні випадкові величини. Функції $t_i(x, y, \varsigma_i, q_i)$ дійсні, обмежені, вимірні по аргументам (x, y) на деякій відкритій, обмеженій, випуклій множині $U \supset S$, випуклі ς_i по на U і борелевські по q_i на множині значень випадкової величини $\theta_i(\Theta)$ для всіх $i = \overline{1, m}$, $f(x, y, q_0)$ – дійсна, невід'ємна, обмежена, вимірна по (x, y) на S і борелівська по q_0 на множині значень випадкової величини $\theta_0(\Theta)$.

Обчислення математичного очікування передбачає обчислення значення визначеного інтегралу, а попередньо і сумісної функції щільності розподілу випадкових величин. Ці задачі являються досить складними і в загальному випадку не мають аналітичного розв'язку, тому пропонується перейти від початкової стохастичної задачі до її наближеного детермінованого еквіваленту.

Позначимо

$$\varsigma = (\varsigma_1, \dots, \varsigma_m), \quad \theta = (\theta_0, \dots, \theta_m),$$

$$g(\{S_1, \dots, S_m\}, \varsigma, \theta) = \sum_{i=1}^m \int_{S_i} f(x, y, \theta_0) t_i(x, y, \varsigma_i, \theta_i) dx dy.$$

Будемо вважати, функції $f(x, y, \theta_0)$, $t_i(x, y, \varsigma_i, \theta_i)$, $i = \overline{1, m}$ – двічі неперервно диференційовані відповідно по $\theta_0, \dots, \theta_m$ на множині значень випадкових величин навколо їх математичних очікувань $\overline{\theta_0}, \dots, \overline{\theta_m}$.

Для заміни початкової стохастичної задачі її наближеним детермінованим еквівалентом розкладемо функцію $g(\{S_1, \dots, S_m\}, \varsigma, \theta)$ в ряд Тейлора навколо $\overline{\theta}$ Залишаючи в роз-

кладі члени до другого порядку включно і застосовуючи операцію обчислення математичного очікування, одержимо:

$$Eg(\{S_1, \dots, S_m\}, \varsigma, \theta) = \sum_{i=1}^m \int_{S_i} \left[f(x, y, \bar{\theta}_0)(t_i(x, y, \varsigma_i, \bar{\theta}_i) + \frac{1}{2} t_i''(x, y, \varsigma_i, \bar{\theta}_i) \check{\theta}_i + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} f''(x, y, \bar{\theta}_0)(t_i(x, y, \varsigma_i, \bar{\theta}_i) \check{\theta}_0) \right] dx dy \quad (4)$$

Очевидно, що наближена рівність в (4) буде точною для лінійної і квадратичної відносно функції. Для розв'язання детермінованого еквіваленту задачі (2) можна застосувати методіку, запропоновану в [4]. Для цього задачу зведемо до еквівалентного вигляду, вводючи характеристичні функції $\mu_i(x, y)$ множин S_i , $i = \overline{1, m}$:

$$\mu_i(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (x, y) \in S_i \\ 0, & \text{якщо } (x, y) \notin S_i \end{cases} \quad (5)$$

Знайти пару елементів $(\mu_*(x, y), \varsigma_*)$ таку, що

$$F(\mu_*(x, y), \varsigma_*) = \min_{(\mu(x, y), \varsigma) \in M \times S^m} F(\mu(x, y), \varsigma), \quad (6)$$

де

$$F(\mu(\cdot), \varsigma) = \int_S \sum_{i=1}^m \sum_{i=1}^m \int_{S_i} \left[f(x, y, \bar{\theta}_0)(t_i(x, y, \varsigma_i, \bar{\theta}_i) + \frac{1}{2} t_i''(x, y, \varsigma_i, \bar{\theta}_i) \check{\theta}_i + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} f''(x, y, \bar{\theta}_0)(t_i(x, y, \varsigma_i, \bar{\theta}_i) \check{\theta}_0) \right] \mu_i(x, y) dx dy, \quad (7)$$

$$M = \{\mu(x, y) = (\mu_1(x, y), \dots, \mu_m(x, y)) :$$

$$\sum_{i=1}^m \mu_i(x, y) = 1, \quad \text{м.в. } (x, y) \in S, \quad (8)$$

$$\mu_i(x, y) = 0 \quad \text{або} \quad 1 \quad \text{м.в. } (x, y) \in S, \quad i = \overline{1, m},$$

$$\varsigma = (\varsigma_1, \dots, \varsigma_m) \in \underbrace{S \times \dots \times S}_m = S^m.$$

Опишемо метод розв'язання цієї задачі.

Очевидно [4],

$$F(\mu_*(.), \varsigma_*) = \min_{(\mu, \varsigma) \in M \times S^m} F(\mu(.), \varsigma) = \min_{\varsigma \in S^m} (\min_{\mu(.) \in M} F(\mu(.), \varsigma)). \quad (9)$$

Аналогічно до [4], оптимальний розв'язок внутрішньої задачі з (9) досягається при кожному фіксованому $\varsigma \in S^m$ на вектор-функції $\mu_*(x, y) = (\mu_{*1}(x, y), \dots, \mu_{*m}(x, y))$, i -а компонента якої має вигляд:

$$\mu_{*i}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (x, y) \in S_{*i}, \\ 0, & \text{якщо } (x, y) \notin S_{*i} \end{cases}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} S_{*i} = \{(x, y) : & f(x, y, \overline{\theta}_0)(t_i(x, y, \varsigma_i, \overline{\theta}_i) + \frac{1}{2}t_i''(x, y, \varsigma_i, \overline{\theta}_i)\check{\theta}_i + \\ & + \frac{1}{2}f''(x, y, \overline{\theta}_0)(t_i(x, y, \varsigma_i, \overline{\theta}_i)\check{\theta}_0 = \min_{l=1, m} (f(x, y, \overline{\theta}_0)(t_l(x, y, \varsigma_l, \overline{\theta}_l) + \\ & + \frac{1}{2}t_l''(x, y, \varsigma_l, \overline{\theta}_l)\check{\theta}_l + \frac{1}{2}f''(x, y, \overline{\theta}_0)(t_l(x, y, \varsigma_l, \overline{\theta}_l)\check{\theta}_0))\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Позначимо

$$P(\varsigma) = \min_{\mu(.) \in M} F(\mu(.), \varsigma), \quad \varsigma \in S^m. \quad (12)$$

Далі слідуючи [4], зовнішня задача з (9) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} P(\varsigma) = \int_S \min_{l=1, m} (f(x, y, \overline{\theta}_0)(t_l(x, y, \varsigma_l, \overline{\theta}_l) + \frac{1}{2}t_l''(x, y, \varsigma_l, \overline{\theta}_l)\check{\theta}_l + \\ + \frac{1}{2}f''(x, y, \overline{\theta}_0)(t_l(x, y, \varsigma_l, \overline{\theta}_l)\check{\theta}_0)) dx dy \rightarrow \min, \quad \varsigma \in S^m. \end{aligned} \quad (13)$$

Сформулюємо алгоритм розв'язання поставленої задачі.

В основі алгоритму лежать формули (10) і один з варіантів метода узагальненого градієнтного спуску с розтягом простору в

напрямі різниці двох послідовних узагальнених градієнтів. В даній роботі г-алгоритм застосовується в Н-формі [9], для якої ітераційна формула набуває вигляду

$$\varsigma^{k+1} = \varsigma^k - h_k \frac{H_{k+1} g_P(\varsigma^k)}{\sqrt{(H_{k+1} g_P(\varsigma^k), g_P(\varsigma^k))}}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

де

$$H_{k+1} = H_k + (1/\delta_k^2 - 1) \frac{H_k \Delta_k \Delta_k^T H_k}{(H_k \Delta_k, \Delta_k)}, \Delta_k = g_P(\varsigma^k) - g_P(\varsigma^{k-1}).$$

Коефіцієнт розтягу простору $\delta_k=3$. Для крокового множника h_k застосовується адаптивний спосіб регулювання, описаний в [9].

Область Π вміщуємо в паралелепіпед Π , сторони якого паралельні осям координат, покладаємо $f(x, y, \theta_0) = 0$ для $(x, y) \in \Pi \setminus S$. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутною сіткою та покладаємо початкове наближення $\varsigma = \varsigma^{(0)}$. Обчислюємо значення $\mu^{(0)}(x, y)$ в вузлах сітки за формулами (10) при $\varsigma = \varsigma^{(0)}$, значення градієнта $g_P(\varsigma^{(0)})$ при $\mu(x, y) = \mu^{(0)}(x, y)$, $\varsigma = \varsigma^{(0)}$, обираємо початковий пробний крок г-алгоритму $h_0 > 0$, та знаходимо

$$\varsigma^1 = PR_{\Pi} \left(\varsigma^0 - h_0 \frac{H_1 g_P(\varsigma^0)}{\sqrt{(H_1 g_P(\varsigma^0), g_P(\varsigma^0))}} \right),$$

де PR_{Π} — оператор проектування на Π .

Переходимо ко другого кроку.

Нехай в результаті обчислень після k кроків алгоритму маємо певні значення $\varsigma^{(k)}$, $\mu^{(k)}(x, y)$ в вузлах сітки. Опишемо $(k+1)$ -й крок.

1. Обчислюємо значення $\mu^{(k)}(x, y)$ в вузлах сітки при $\varsigma = \varsigma^{(k)}$.
2. Визначаємо значення $g_P(\varsigma)$ при $\mu(x, y) = \mu^{(k)}(x, y)$, $\varsigma = \varsigma^{(k)}$.

3. Проводимо $(k+1)$ -й крок Γ -алгоритму в Н-формі [9], ітераційна формула якого має вигляд:

$$\varsigma^{k+1} = PR_{\Pi} \left(\varsigma^k - h_k \frac{H_{k+1} g_P(\varsigma^k)}{\sqrt{(H_{k+1} g_P(\varsigma^k), g_P(\varsigma^k))}} \right).$$

4. Якщо умови

$$\|\varsigma^{k+1} - \varsigma^k\| \leq \epsilon, \epsilon > 0, \quad (15)$$

не виконуються, переходимо до $(k+2)$ -го кроку алгоритму, інакше — до п.5.

5. Покладаємо $\varsigma_* = \varsigma^{k+1}$, $\mu_*(x, y) = \mu^{k+1}(x, y)$.

6. Обчислюємо оптимальне значення функції мети за формулою

$$P(\varsigma) = \int_S \min_{l=1, m} (f(x, y, \bar{\theta}_0)(t_l(x, y, \varsigma_l, \bar{\theta}_l) + \\ + \frac{1}{2} t_l''(x, y, \varsigma_l, \bar{\theta}_l) \check{\theta}_l + \frac{1}{2} f''(x, y, \bar{\theta}_0)(t_l(x, y, \varsigma_l, \bar{\theta}_l) \check{\theta}_0) dx dy, \quad \text{при } \varsigma = \varsigma_*.$$

Алгоритм описано.

Ефективність розбиття на сегменти обслуговування можна оцінювати за допомогою коефіцієнту нерівномірності навантаження по споживачам [1]:

$$k_i = \frac{\int_{S_i} (f(x, y, \bar{\theta}_0) + \frac{1}{2} f''(x, y, \bar{\theta}_0) \check{\theta}_0) dx dy}{\min \left\{ \begin{array}{l} \int_{S_i} (f(x, y, \bar{\theta}_0) + \frac{1}{2} f''(x, y, \bar{\theta}_0) \check{\theta}_0) dx dy, \dots, \\ \int_{S_m} (f(x, y, \bar{\theta}_0) + \frac{1}{2} f''(x, y, \bar{\theta}_0) \check{\theta}_0) dx dy \end{array} \right\}}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (16)$$

Тут величина $\int_{S_i} (f(x, y, \bar{\theta}_0) + \frac{1}{2} f''(x, y, \bar{\theta}_0) \check{\theta}_0) dx dy$ означає середню кількість споживачів в зоні обслуговування станцією ς_i , $i = \overline{1, m}$.

Висновки. Таким чином у даній роботі досліджена одна спеціального вигляду задача оптимального покриття або розбиття множини споживачів на зони обслуговування без обмежень на потужності станцій з відшукуванням координат центрів підмножин, проведено аналіз існуючих постановок споріднених задач та методів їх розв'язання. Побудована економіко-математичну модель задачі, розроблено алгоритм її розв'язання, запропоновано критерій ефективності розбиття на сегменти обслуговування, що визначається як коефіцієнт нерівномірності навантаження по споживачам.

До задач (3) або (4), наприклад, зводяться задачі розміщення поштових відділень, магазинів, що реалізують товари першої необхідності, планування місць розмітки пішохідних переходів, розміщення пунктів утилізації побутових відходів та інших об'єктів, а також визначення меж обслуговування цими об'єктами. Для розв'язання таких задач необхідно проведення додаткових досліджень, зібрати та статистично обробити додаткову інформацію про можливі шляхи пересування споживачів та можливі місця розміщення станцій обслуговування. Аналіз інфраструктури населеного пункту або регіону дозволить з'ясувати вузькі проблемні місця в функціонуванні різних організацій, усунення яких призведе до підвищення якості життя населення.

Література

1. Бандоріна Л.М. Моделювання визначення оптимальних меж зон обслуговування при фіксованих положеннях станцій обслуговування / Л.М. Бандоріна., О.С. Лозовський // Матеріали доповідей міжнародної науково-практичної конференції «Сучасний стан і тенденції розвитку економіки країни» — Запоріжжя: КПУ, 2016. — С. 190–192.
2. Изотов Д.А. Новая экономическая география: границы возможностей / Д.А. Изотов // Пространственная экономика. — Хабаровск; ИЭИ ДВО РАН, 2013. — № 3. — С. 123–160.
3. Качан Є.П. Розміщення продуктивних сил і регіональна економіка України: Навч. посібник / За ред. Є. П. Качана. — Тернопіль: Економічна думка, 2005. — 310 с.
4. Кісельова О.М. Алгоритм розв'язання спеціального типу задачі оптимального розбиття множин у разі обмежень на потужності із заданим розташуванням центрів підмножин / О.М. Кісельова, Л.М. Бандоріна, Л.І. Лозовська // Зб. наук. праць «Питання прикладної математики і математичного моделювання». — Д.: ДНУ, 2015. — С.88–98.
5. Розміщення продуктивних сил і регіональна економіка / За ред. В.В. Ковалевського, О.І. Михайлюка, В.Ф. Семенова. — 7-ме вид., стереот. — К.: Знання, 2005. — 350 с.

6. Стадницький Ю.І. Просторові аспекти конкуренції технологій: монографія / Ю.І. Стадницький, О.Е. Товкан, А.В. Симак, Л.М. Коваль. — Хмельницький: ХНУ, 2009. — 95 с.

7. Стадницький Ю.І. Розміщення продуктивних сил (теоретичні основи): Навч. посібник / Ю.І. Стадницький, А.Г. Загородній. — К.: Знання, 2008. — 351 с.

8. Стеченко Д.М. Розміщення продуктивних сил і регіоналістика: Підручник / Д.М.Стеченко. — К.: Вікар, 2006. — 396 с.

9. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложение / Н.З. Шор / — К.: Наукова Думка. — 1979. — 199 с.

References

1. Bendorina L.M. Modeliuvannia vyznachennia optymal'nykh mezh zon obsluhovuvannia pry fiksovanykh polozhenniakh stantsij obsluhovuvannia / L.M. Bendorina., O.S. Lozovs'kyi // Materialy dopovidei mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii «Suchasnyi stan i tendentsii rozvytku ekonomiky krainy» — Zaporizhzhia: KPU, 2016. — S. 190–192.

2. Yzotov D.A. Novaia ekonomycheskaia heohrafia: hranytsy vozmozhnostei / D.A. Yzotov // Prostranstvennaia ekonomika. — Khabarovsk: YEY DVO RAN, 2013. — № 3. — S. 123–160.

3. Kachan Ye.P. Rozmischennia produktyvnykh syl i rehional'na ekonomika Ukrainy: Navch. posibnyk / Za red. Ye. P. Kachana. — Ternopil': Ekonomichna dumka, 2005. — 310 s.

4. Kisel'ova O.M. Alhorytm rozv'iazannia spetsial'nogo typu zadachi optymal'nogo rozbyt'tia mnozhyn u razi obmezhen' na potuzhnosti iz zadanykh roztashuvanniam tsestriv pidmnozhyn / O.M. Kisel'ova, L.M. Bendorina, L.I. Lozovs'ka // Zb. nauk. prats' «Pytannia prykladnoi matematyky i matematychnoho modeliuvannia». — D.: DNU, 2015. — S. 88–98.

5. Rozmischennia produktyvnykh syl i rehional'na ekonomika / Za red. V.V. Kovalevs'koho, O.L. Mykhajliuka, V.F. Semenova. — 7-me vyd., stereot. — K.: Znannia, 2005. — 350 s.

6. Stadnyts'kyi Yu.I. Prostorovi aspekty konkurentsii tekhnolohij: monohrafiia / Yu.I. Stadnyts'kyi, O.E. Tovkan, A.V. Symak, L.M. Koval'. — Khmel'nyts'kyi: KhNU, 2009. — 95 s.

7. Stadnyts'kyi Yu.I. Rozmischennia produktyvnykh syl (teoretychni osnovy): Navch. posibnyk / Yu.I. Stadnyts'kyi, A.H. Zahorodnij. — K.: Znannia, 2008. — 351 s.

8. Stechenko D.M. Rozmischennia produktyvnykh syl i rehionalistyka: Pidruchnyk / D.M.Stechenko. — K.: Vikar, 2006. — 396 s.

9. Shor N.Z. Metody mynynyatsyvy nedyyferentsyruemykh funktsy y ykh prylozhenye / N.Z. Shor / — K.: Naukova Dumka. — 1979. — 199 s.

Статтю подано до редакції 1.11.2018 р.