

С. О. Силантьєв, канд. техн. наук,
доцент кафедри менеджменту,
ДВНЗ «Київський національний економічний університет
імені Вадима Гетьмана»

РЕКОНСТРУКЦІЯ АТРАКТОРІВ ІМПЛІЦИТНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ОПЦІОНІВ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДІВ НЕЧІТКОЇ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ

У статті на основі теорії динамічних систем та нечітких методів кластеризації досліджено атрактори імпліцитної волатильності опціонів на ринкові індекси S&P 500, NASDAQ 100, S&P 100. Дослідженнями встановлено, що ентропія нечіткої кластеризації імпліцитної волатильності знаходиться в інтервалі від 0,6477 до 0,7986. Структури атракторів імпліцитної волатильності (*IV*) представлено за допомогою двох головних компонент з дисперсією в інтервалі від 88,82 до 57,59 %. На основі розробленого підходу запропоновано шляхи прогнозування динаміки імпліцитної волатильності опціонів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: волатильність, імпліцитна волатильність, нечіткий кластер, опціон, ринковий індекс.

Швидкий розвиток фінансових ринків на початку XXI ст. і фінансова криза, яку зазнала світова фінансова система восени 2008 року, вимагають розробки нових та досконаліших фінансових інструментів та методів прогнозування їх ціноутворення. Для подальшого впровадження цих інструментів необхідні, по-перше, їх глибоке теоретичне обґрунтування, по-друге, адекватні емпіричні знання відносно ціноутворення не тільки базових, але й похідних фінансових інструментів.

Роботами Башельє, на початку XX-го ст., визначена складність прогнозування ціни базових інструментів. З іншого боку, прогнозування волатильності є менш складною задачею, що доведено у роботах Р. Енгла, Т. Боллерслева в середині 90-х років минулого сторіччя [2, 3]. Вони власними дослідженнями започаткували створення моделей прогнозування волатильності на основі авторегресійних умовних гетероскедастичних процесів, які відкрили широкі напрямки наукових робіт по створенню моделей GARCH, E-GARCH, EWMA та стохастичної волатильності на основі багатовимірних щільностей розподілу [4].

Мета статті — подолання недоліків механістичної декомпозиції волатильності, визначення проблеми прогнозування імпліцитної волатильності опціонів на основі сучасних результатів теорії

динамічних систем, теореми Такенса та методів нечіткої кластеризації; формування атракторів імпліцитної волатильності опціонів на ринкові індекси S&P 500, NASDAQ 100, S&P 100.

Імпліцитні волатильності (*IV*) опціонів на ринкові індекси S&P 500, NASDAQ 100, S&P 100 є одними з найрозповсюдженіших індикаторів ризиків на ринку США. Вони розраховуються на основі поточних ринкових цін опціонів на ринкові індекси, торгівля якими здійснюється на Чикагський опціонній біржі. Підвищені значення *IV* за останні 20 років були у часи краху хеджевого фонду LTCM, Інтернет міхура, і, зараз, у часи кризи на іпотечному ринку США.

Завдяки чому багато наукових шкіл здійснюють глибокі дослідження у напрямку прогнозування *IV*. У роботах С. Росса та Т. Андерсена волатильність пов'язується з ціноутворенням акцій підприємств на ринку та впливом на цей процес інформації, яка поступає на ринок [5, 6]. Р. Енгл та В. Нг запропонували узагальнену модель GARCH, у якій деякі параметри відповідають на новини, що поступають на ринок і інтерпретуються залежно від того, якими вони є: позитивними або негативними [1—3]. Творча група науковців під керівництвом Дж. Кемпбела підкреслюють високу важливість макроекономічних новин про очікувані грошові потоки та ставки рефінансування на формування, по-перше, цін, а по-друге, волатильності базових та похідних фінансових інструментів. З цієї точки зору, у роботі Дж. Кемпбела запропоновані узагальнені фактори волатильності, які безпосередньо впливають на ці процеси: «ідіосинкратичний», «промисловий», «ринковий» [7]. Дослідженнями Дж. Мехью та Т. МакКарді запропонована змішана стрибково-дифузійна GARCH модель, у якій враховуються два різних типи новин: «нормальні» та «незвичайні». При цьому, «нормальні» новини сприяють повільній зміні умовній дисперсії волатильності, у той час коли «незвичайні» новини є джерелом виникнення рідких, але різких змін у волатильності базових та похідних фінансових інструментів, імпліцитній волатильності тощо [8].

Але підхід, пов'язаний з механістичною декомпозицією волатильності, ще з часів лауреата Нобелівської премії Р. Енгла, пов'язаний з параметричною ідентифікацією GARCH моделей різних типів, у цілому, є умовним і не зовсім адекватним [2, 3]. Такий механістичний підхід не враховує комплексну динаміку волатильності, що можна розглядати у якості його головного недоліку.

Запропонованим підходом вирішується дві важливі проблеми: при аналізі *IV* немає припущення про існування нормального

закону розподілу, більш того, взагалі не приймається до уваги наявність будь-якого закону розподілу; формування динаміки IV , у порівнянні з загальноприйнятими моделями на основі широкого спектру GARCH моделей, має, з статистичної точки зору, більш обґрунтовану інтерпретацію (рис. 1—6). Для розробки запропонованого підходу використаємо центральну теорему теорії динамічних систем — теорему Такенса про реконструкцію атракторів на основі наявних експериментальних даних [9].

У такому випадку імпліцитна волатильність IV опціонів на ринкові індекси розглядається за процедурою реконструкції Такенса наступним чином [9]:

$$IV = \{iv(t), iv(t + \tau), iv(t + 2\tau), \dots, iv(t + (m - 1)\tau)\}, \quad (1)$$

де m — реконструйована розмірність IV (у роботі запропоновано прив'язувати до календарних місяців: 1 місяць, 2 місяці), τ — часовий зсув (основа — щоденні дані).

Відносно вибору параметрів m та τ проведено багато наукових досліджень на основі кореляційних інтегралів, але на жодному з них не можна зробити обґрунтовані висновки. Тому при використанні цього підходу важливо «...не втрачати почуття міри, та здорового глузду» [10].

На основі реконструйованої IV сформуємо матриці $[IV_s]$, $s = 1, 2$ з останнім рядком для $T \equiv 04$ листопада 2008 року, наступним чином:

$$IV_s = \begin{bmatrix} iv(t) & iv(t - \tau_s) & \dots & iv(t - (m - 1)\tau_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ iv(t_i) & iv(t_i - \tau_s) & \dots & iv(t_i - (m - 1)\tau_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ iv(T) & iv(T - \tau_s) & \dots & iv(T - (m - 1)\tau_s) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

де t — початковий час надання ринкових даних про імпліцитну волатильність. Параметр τ_s визначає зсув довжиною від одного до 2-х календарних місяців. Далі здійснимо нечітку кластеризацію для об'єктів $IV(t_i)$, розмірністю $(1:m)$, у кількості $|T - t|$. Метою алгоритму нечіткої кластеризації є мінімізація цільової функції квадратів відхилень:

$$f(\mathfrak{Z}(IV)) = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{|T-t|} \left| iv_i^{(j)} - c_j \right|^2, \quad (3)$$

де $|iv_i^{(j)} - c_j|^2$ — міра дистанції між реконструйованою $iv_i^{(j)}$ та центром нечіткого кластера c_j , яка виступає у якості індикатора належності до кластеру; $\mathfrak{Z}(IV) = \{IV(t_i) \mid IV(t_i) \in IV\}$ — нечітке розбиття множини об'єктів кластеризації.

Хоча алгоритм нечіткої кластеризації виконується при умовах визначення мінімуму функції оптимізації (3), дуже мало відомо про його загальну збіжність. Наукові дослідження з цього напрямку, які проведені Дж. Беждеком, Р. Хатавейом на основі теореми Цангвіла про загальну збіжність визначили, що, при використанні дистанції махаланобіса та інших дистанцій у середині кластерів, послідовність ітерацій алгоритму нечіткої кластеризації є кінцевою і збігається до стаціонарної точки для функції оптимізації (3) або, по меншій мірі, просто збігається до стаціонарної точки [11].

В абсолютній більшості випадків ступінь відношення $IV(t_i)$ до кластеру $IV(k)$, $\mu_k(IV(t_i))$, $\forall IV(t_i) \in IV_s, k = 1, \dots, c$ вимірюється від 0 до 1, що є сигналом до часткової належності до кластеру $IV(k)$. Проаналізуємо властивості значень матриці належності $\mu_k(IV(t_i))$ до кластерів $IV(k)$, яка є результатом вирішення задачі нечіткої кластеризації (3). При нечіткій кластеризації елементам матриці $M = [\mu_{i,k}], i = 1, \dots, |T - t|, k = 1, \dots, c$ дозволяється отримувати будь-які значення в інтервалі $[0, 1]$. Таким чином, матриця $M = [\mu_{i,k}]$, розмірністю $[|T - t| \times c]$, визначає нечітку кластеризацію $IV(t_i)$ з виконанням наступних умов відносно ступенів показника $\mu_{i,k}$ належності до кластерів $IV(k)$:

$$\mu_{i,k} \in [0, 1], 1 \leq i \leq |T - t|, 1 \leq k \leq c, \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^c \mu_{i,k} = 1, 1 \leq i \leq |T - t|, \quad (5)$$

$$0 < \sum_{i=1}^{|T-t|} \mu_{i,k} < |T - t|, 1 \leq k \leq c. \quad (6)$$

Результат нечіткої кластеризації для визначеної кількості $|T - t|$ об'єктів $IV(t_i)$ задаються наступною умовою:

$$M = R^{|T-t| \times c} \mid \mu_{i,k} \in [0, 1], \forall i, k; \sum_{k=1}^c \mu_{i,k} = 1, \forall i; 0 < \sum_{i=1}^{|T-t|} \mu_{i,k} < |T - t|, \forall k. \quad (7)$$

Як бачимо, із формул (4)—(7) кількість нечітких кластерів c імпліцитної волатильності є невизначеною змінною, тобто вона задається у якості початкової умови для вирішення задачі нечіткої кластеризації IV — (3). Таким чином, проблема визначення валідності отриманого розбиття на нечіткі кластери може бути сформульованою у наступному вигляді: наскільки об'єктивним є отримане розбиття $\mathfrak{Z}(IV)$ на нечіткі кластери $IV(k)$, щоб оптимальним чином співвідноситися до початкових даних. Взагалі запропонований алгоритм нечіткої кластеризації IV знаходить таке розбиття, при визначеній кількості кластерів, що воно оптимально параметризується відносно початкових даних (2). Хоча, іноді, це зовсім не свідчить про те, що найкраща параметризація є найбільш адекватною з точки зору економічної інтерпретації. Для вирішення статистичної валідності розбиття IV на нечіткі кластери використовуються наступні статистичні міри валідності: коефіцієнт перекриття, ентропія кластеризації, індекс перекриття, індекс розділення, індекс Хі та Бені, індекс Дана, альтернативний індекс Дана [12].

Опрацювання даних оптимізаційної задачі нечіткої кластеризації (3) при наявних обмеженнях (4) — (7) здійснювалося для імпліцитної волатильності опціонів на ринкові індекси S&P 500 (з 2 січня 1990 року), NASDAQ 100 (з 10 жовтня 2000 року), S&P 100 (з 2 січня 1986 року) до 4 листопада 2008 року.

З табл. 1 можна бачити, що при визначеній статистичній валідності нечітких кластерів IV ентропія кластеризації знаходиться у границях від 0,6477 до 0,7986, що свідчить про високий обсяг інформації, яка може бути отриманою за допомогою визначеної кількості валідних нечітких кластерів. Підтвердженням до цього висновку є зображення на рис. 1—6 кластерів IV опціонів ринкових індексів, що досліджуються. З цих рисунків можна бачити, що динаміка зміни IV здійснюється завдяки деяким сталим конфігураціям (атракторам) [10], які представляються на рисунках двома компонентами, забезпечуючи трансформацію m -вимірного вектору $IV(t_i)$. Адекватність цієї трансформації на основі оцінки залишкової дисперсії для двох компонент є наступною: мінімальна — 57,59 % (див. рис. 6), а максимальна — 88,82 % (див. рис. 3). Додатково з рис. 1, 2, 5 та 6 можна бачити виникнення підвищених ринкових ризиків, які визначаються ціноутворенням опціонів на ринкові індекси, завдяки тому, що їх IV у нижній частині цих рисунків здійснює значне відхилення від власних атракторів.

Таблиця 1

СТАТИСТИЧНА ВАЛІДНІСТЬ КЛАСТЕРІВ ІМПЛІЦИТНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ

Кількість валідних кластерів	IV опціонів (S&P 500. 1 – 1 місяць) / 3	IV опціонів (S&P 500. 2 – 2 місяці) / 4	IV опціонів (NASDAQ 100. 1 – 1 місяць) / 4	IV опціонів (NASDAQ 100. 2 – 2 місяці) / 4	IV опціонів (S&P 100. 1 – 1 місяць) / 3	IV опціонів (S&P 100. 2 – 2 місяці) / 2
коефіцієнт перекриття	0,637	0,5981	0,6621	0,6619	0,6292	0,6792
ентропія кластеризації	0,6695	0,7986	0,654	0,6477	0,7052	0,724
індекс перекриття	2,4075	1,9418	0,6509	0,4468	3,1521	4,273
індекс розділення	0,0009	0,0009	0,0006	0,0007	0,001	0,0014
індекс Хі та Бені	45,4655	12,6004	17,4487	9,7507	27,7613	20,7979
індекс Дана	0,0007	0,0014	0,0035	0,0041	0,0005	0,0007
альтернативний індекс Да- на	0,0086	0,0003	0,0024	0,0012	0,0004	0,0002

Таким чином, у статті за допомогою теорії динамічних систем, методів нечіткої кластеризації сформульована та вирішена оптимізаційна задача (3) знаходження атракторів IV опціонів на ринкові індекси S&P 500, NASDAQ 100, S&P 100. На основі дослідження статистичних мір валідності нечітких кластерів знайдено, що мінімальна ентропія кластеризації IV дорівнює 0,6477, а максимальна — 0,7986. Мінімальна та максимальна залишкова дисперсія представлення атракторів за допомогою двох головних компонент — 57,59 % та 88,82 % відповідно. Атрактори IV можуть бути використані, по-перше, з метою прогнозування ціноутворення IV, а, по-друге, оцінювання поточних та майбутніх ринкових ризиків, що виникають на різних етапах економічного розвитку.

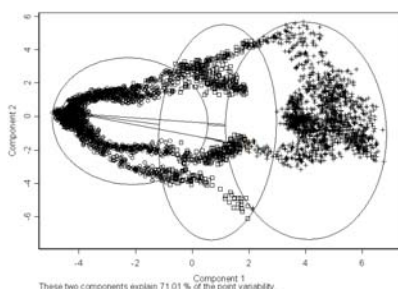


Рис. 1. Атрактор IV опціонів на
ринковий індекс S&P 500.
 τ_1 – 1 місяць

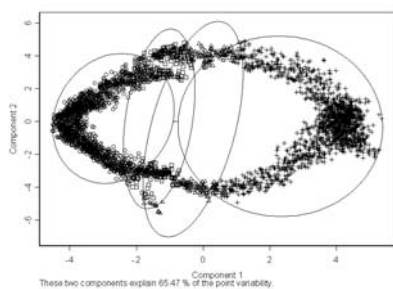


Рис. 2. Атрактор IV опціонів на
ринковий індекс S&P 500.
 τ_2 – 2 місяці

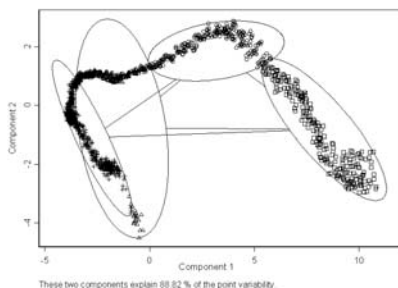


Рис. 3. Атрактор IV опціонів на
ринковий індекс NASDAQ 100.
 τ_1 – 1 місяць

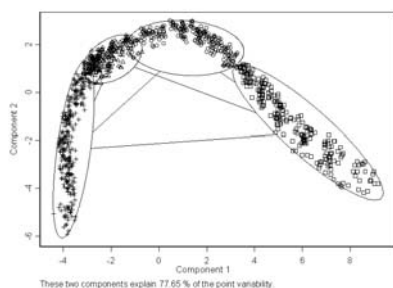


Рис. 4. Атрактор IV опціонів на
ринковий індекс NASDAQ 100.
 τ_2 – 2 місяці

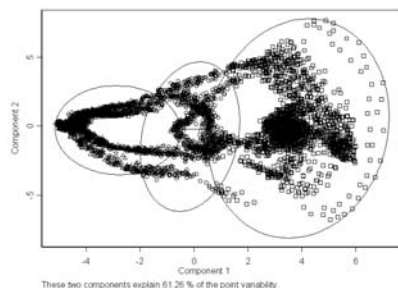


Рис. 5. Атрактор IV опціонів на
ринковий індекс S&P 100.
 τ_1 – 1 місяць

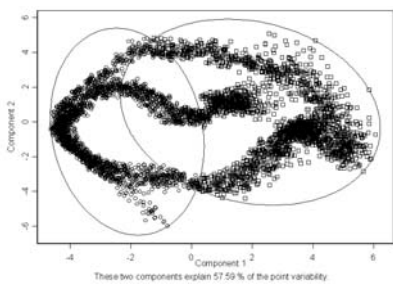


Рис. 6. Атрактор IV опціонів на
ринковий індекс S&P 100.
 τ_2 – 2 місяці

Запропонований підхід усуває недоліки механістичного підходу, пов'язаного з використанням моделей типу GARCH, E-GARCH для вивчення динаміки IV.

Література

1. Engle R. F., Ng V. K. Measuring and testing the impact of news on volatility. — Journal of Finance. 1993, Vol. 48, № 5. — P. 1749—1778.
2. Engle R. F. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, 50, 1982. — P. 987—1007.
3. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 21, 1986. — P. 307—328.
4. McAleer M. Automated inference and learning in modeling financial volatility, *Econometric Theory*, № 21, 2005. — P. 232—261.
5. Ross S. A. Information and volatility: the no-arbitrage martingale approach to timing and resolution irrelevancy. — *Journal of Finance*, vol. 44, № 1, 1989. — P. 1—17.
6. Andersen T. Return volatility and trading volume: an information flow interpretation of stochastic volatility. — *Journal of Finance*, vol. 51, № 1, 1996. — P. 169—204.
7. Campbell J. Y., Lettau M., Malkiel B. G., Xu. Y. Are individual stocks become more volatile? An empirical exploration of idiosyncratic risk. — *Journal of Finance*, vol. 56, № 1, 2001. — P. 1—43.
8. Maheu J. M., McCurdy T. H. News arrival, jump dynamics and volatility components for individual stock returns. — *Journal of Finance*, vol. 59, № 2 (April), 2004. — P.755—793.
9. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. In: D.A. Rand and L.S. Young, editors, *Dynamical Systems and Turbulence*, Warwick 1980, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, Berlin, 898, 1981. — P. 366—381.
10. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В. Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды. — М.: КомКнига, 2006. — 280 с.
11. Hathaway R. J., Bezdek J. C. Local convergence of the fuzzy c-means algorithms, *Pattern Recognition* Vol. 19(6), 1986. — P. 477—480.
12. Xie X. L., Beni G. A validity measure for fuzzy clustering, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13, 1991. — P. 841—847.

Стаття надійшла до редакції 21.11.08