

VI ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

УДК 65.012(075.8)

Ю. В. Коляда, докторант,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

КЛАСТЕР-ПРОЦЕДУРА МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ ЯВИЩ

Вперше в моделюванні здійснено кластеризацію різноманітних за змістом математичних моделей (ММ), яка вкрай вигідна з точки зору пізнання адаптивних механізмів економіки. Наведено деякі результати обчислювального експерименту над кластерною ММ, вказано на нові особливості поведінки розв'язку. Записано аналітичний розв'язок кластерної моделі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: кластер-процедура, обчислювальний експеримент.

Як відомо [1], кластер-процедура являє собою **об'єднання** двох найближче розташованих (у сенсі вибраної метрики) об'єктів (кластерів) в один кластер. Це призводить до того, що початкове число n об'єктів зменшується і стає рівним $(n-1)$, причому один кластер буде мати два об'єкти, а $(n-2)$ решти — по одному.

В статті пропонується застосувати принцип кластер-процедури в математичному моделюванні економіки, використанню якого є численні підстави. Одна з них розглядається нижче.

У літературі відома низка соціально-економічних явищ, математичне моделювання яких цілком відповідало потребам свого часу. Послідовно розглянемо здобутки на цьому шляху, виділяючи головне для кожної роботи та щоразу послідовно доповнюючи попереднє наступним результатом. Таким способом досягається повнота картини в цілому.

Модель Річардсона [2—6]. Також фігурує назва модель гонки озброєнь, яку справедливніше розглядати як модель конфлікт-

ної ситуації або загрози (погрози) однієї особи (групи людей) іншій [2].

Відповідна лінійна система звичайних диференціальних рівнянь першого порядку записується:

$$\begin{cases} \bullet \\ x = a * y - m * x + r \\ \bullet \\ y = b * x - n * y + s, \end{cases} \quad (1)$$

де функція $x(t)$ описує затрати однієї сторони конфлікту, $\bullet x = \frac{dx(t)}{dt}$ її похідна; $y(t)$ — витрати протилежної сторони конфлікту двох, a, b, m, n — додатні сталі величини, коефіцієнти r і s відповідно претензій, коли вони додатні, і доброї волі при $r < 0, s < 0$.

Побудова ММ (1) здійснювалась при майже очевидних гіпотезах: 1) кожна з сторін конфлікту змінює швидкість росту (збільшення або зменшення) власного військового потенціалу пропорційно обсягу затрат протилежної сторони; 2) чим більший поточний обсяг витрат на оборону, тим менша швидкість росту озброєнь; 3) одна сторона нарощує озброєння, керуючись своїми претензіями чи зазіханнями, незважаючи на політику щодо неї іншої сторони конфлікту.

Перше рівняння лінійної системи (1) задає горизонтальну швидкість, а друге — вертикальну швидкість точки, траєкторія руху якої у фазовому просторі описується ММ гонки озброєнь.

Можливі три сценарії розвитку подій:

А. Нескінченна гонка озброєнь при $x \rightarrow \infty$ і $y \rightarrow \infty$ ($(m * n - a * b) < 0$; $r > 0$; $s > 0$ — ескаляція гонки озброєнь).

Б. Взаємне роззброєння при $x \rightarrow 0$ і $y \rightarrow 0$ ($(m * n - a * b) > 0$; $r < 0$; $s < 0$).

В. Рівновага озброєнь при $x \rightarrow x^*$ і $y \rightarrow y^*$ ($(m * n - a * b) > 0$; $r > 0$; $s > 0$), де величини x^* і y^* є координати точки перетину прямих l_1 (для $\bullet x = 0$) і l_2 (для $\bullet y = 0$).

Зауваження 1. Якщо мають місце нерівності: $(m * n - a * b) < 0$; $r < 0$;

$s < 0$, то передбачення процесу подій суттєво залежить від початкового стану (x_0, y_0) гонки озброєнь. Геометрично вказана ситуація розглянута на рис. 1.

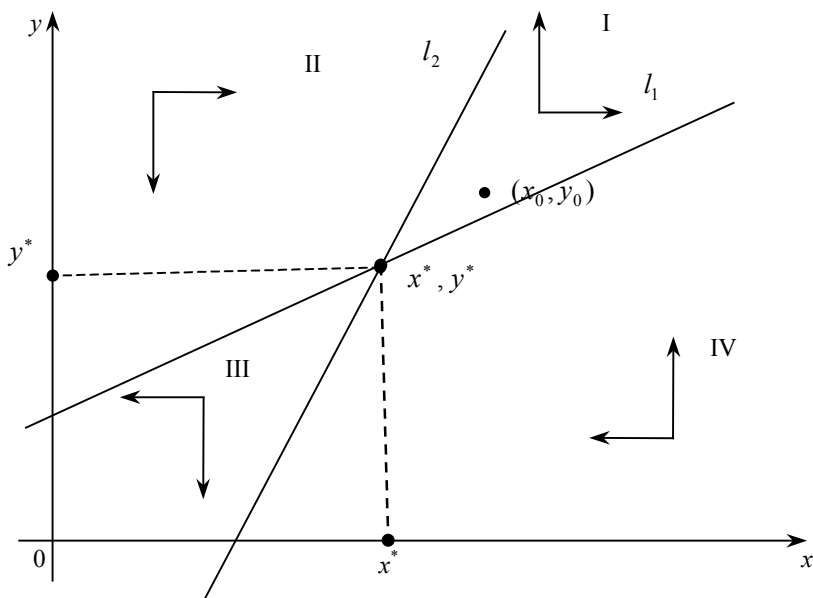


Рис. 1. Поведінка ММ(1) при $r < 0$ або $(m^* a)^* s < 0$

Якщо початковий рівень затрат на озброєння (точка (x_0, y_0)) знаходиться в області I, то гонка озброєнь буде нескінченною.

Якщо точка (x_0, y_0) лежить в області III, розв'язок ММ(1) відходить від рівноважного стану (x^*, y^*) , але прагне до точки $(0, 0)$, спостерігається взаємне роззброєння.

Отже, наявність доброї волі (r і $s > 0$) у однієї із сторін протистояння ще не гарантує прийнятливий результат, який залежить від початкового стану процесу.

Зауваження 2. Стрілки на рис. 1 вказують на горизонтальну та вертикальну швидкості руху точки фазової площини.

Адекватність моделі Річардсона (1) була встановлена [2–5] на прикладі обсягів військових витрат воюючих сторін у першій світовій війні.

На рис. 2 і 3 приводяться одні з багатьох результатів числового моделювання протистояння двох сторін. У цьому випадку має

місце наступне: $(m*n - a*b) = 1,3 > 0$; $r = 0,5$ і $s = 1$ додатні; точка рівноваги $x^* = 0,96$ і $y^* = 0,92$ як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь — $0,5*y - x + 0,5 = 0$ і $0,4*x - 1,5*y + 1 = 0$. Для початкових умов $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ конфлікт згасає (випадок роззброєння сторін).

Недоліки ММ(1) проявляються в двох аспектах: сталості коефіцієнтів r і s та відсутності правила їх обчислення. Оскільки один з коренів характеристичного рівняння ММ(1) додатний, то для стабілізації розвитку подій у [6] пропонуються дві цілком природні можливості вибору коефіцієнтів r і s , а саме: 1) зусилля пропорційні різниці поточних значень кожної сторони конфлікту, тобто r і/або s рівні $(-\gamma * |x - y|)$, і спрямовані на обох учасника конфлікту, причому вони зменшуються при досягненні паритету; 2) миротворчі діяння на кожную сторону конфлікту записуються як $(-\gamma * |x + y|)$, тобто один із учасників набуває окрім власних побуджуючих мотивів ще більшої мотивації реагувати на дії іншої сторони.

Деякі результати широкомасштабного обчислювального експерименту над ММ(1) з використанням описаної вище стратегії примирення сторін наводяться на рис. 4—7. Легко вбачається значна ефективність другого $(-\gamma * |x + y|)$ варіанту зменшення рівня протистояння.

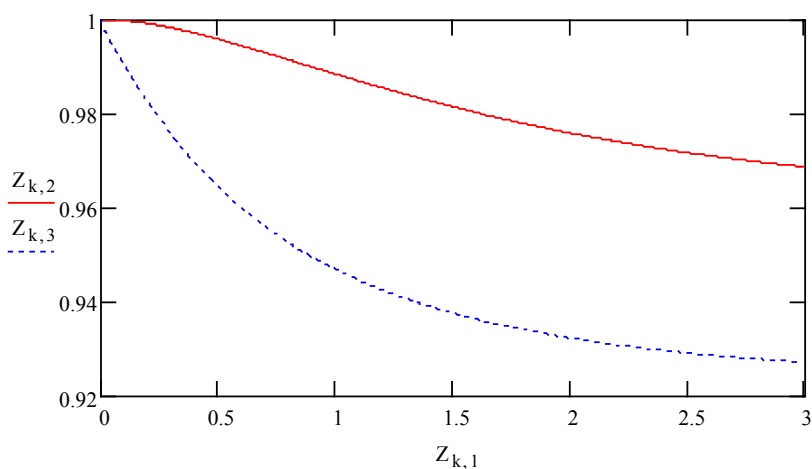


Рис. 2. Розвиток подій у часі на відрізку $[0,3]$

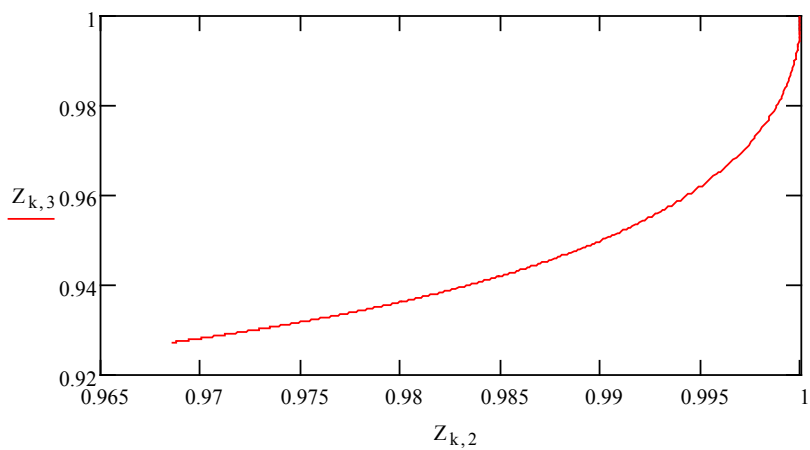


Рис. 3. Фазовий портрет протистояння
(випадок роззброєння сторін)

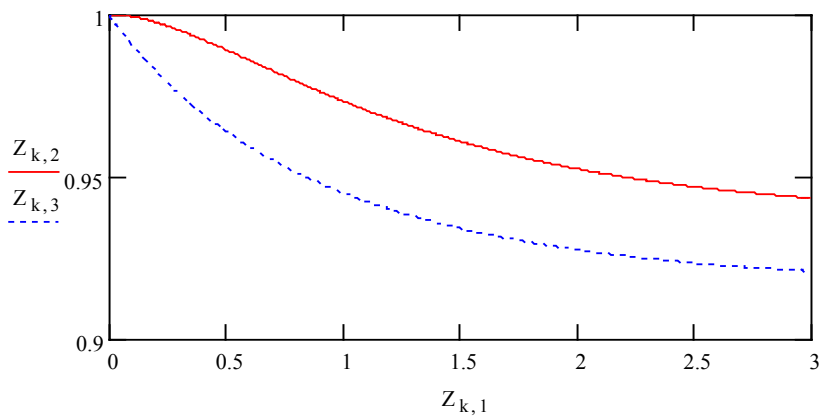


Рис. 4. Розвиток подій у часі $Z_{k,1}$
для першого варіанту миротворчих зусиль

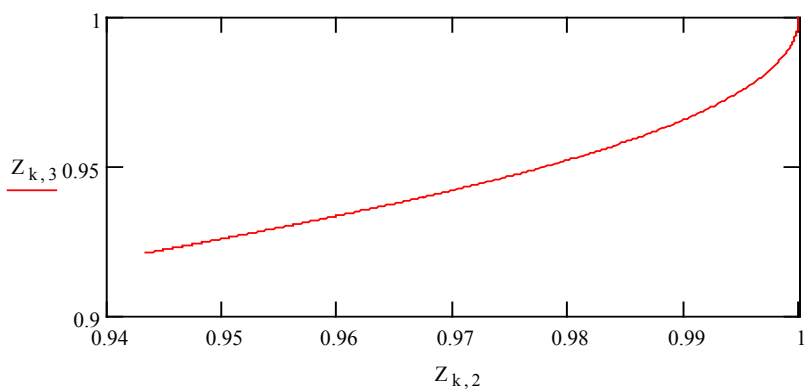


Рис. 5. Фазовий портрет протистояння
для першого варіанту примирення

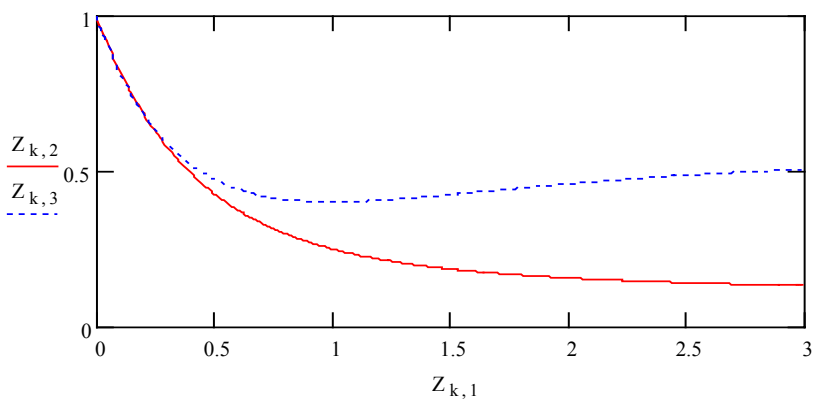


Рис. 6. Розвиток подій з часом
для другого варіанту примирення

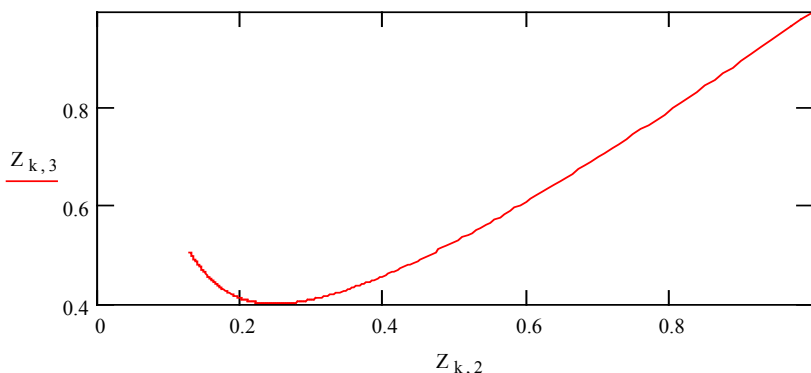


Рис. 7. Фазовий портрет протистояння
для другого варіанту примирення

У монографії [7] приводиться ММ довгих хвиль, яка з додержанням наших позначень записується

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha * x + \alpha * b * y \\ \dot{y} = -\beta * y + \beta * g * p, \end{cases} \quad (1a)$$

де змінна $x(t)$ відповідає темпу приросту продуктивності праці, $y(t)$ — темпу приросту капіталоозброєності, а величина $P = x - y$ є темп приросту норми прибутку; величини α, β, b, g — так звані структурні коефіцієнти. Автори зазначають, що перше рівняння ММ(1a) відображає характер взаємодії процесів накопичення і науково-технічного прогресу, а друге рівняння являє собою руйнівну силу, якою породжуються коливні рухи і визначаються їх поворотні точки. Аналізуючи результати числового моделювання, автори дійшли до висновку, що провідна роль у виникненні довгочасних коливань в економіці належить вкладенням у радикально нову виробничу техніку.

Легко вбачається, що з точністю до знаків і виразів коефіцієнтів система рівнянь (1a) є окремим випадком ММ(1) при $r = s = 0$.

ММ функціонування в економічному середовищі фірми середньої величини має вигляд [8]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha * y - \gamma * x \\ \dot{y} = \mu * y - \beta * x \end{cases} \quad (16)$$

де $x(t)$ — число співробітників на момент часу t ; $y(t)$ — власний капітал, приймаючи наші позначення; коефіцієнт α вказує, яку долю свого капіталу підприємство виділяє на зарплату; коефіцієнт γ відображає динаміку числа працюючих у силу різних причин; коефіцієнтом μ визначається ефективність капіталовкладень, числовий параметр β узагальнює затрати фірми на співробітників. Отже, система диференціальних рівнянь (16) з точністю до числових параметрів є окремий випадок ММ(1) і практично співпадає з (1а).

У стандартному дослідженні стійкості стаціонарного розв'язку ($x^* = y^* = 0$) ММ(16) існують дві можливості: для $\mu > \gamma$ має місце нестійкий фокус і стійкий для $\mu < \gamma$, причому γ — мале число (причин для звільнення працівників небагато); α та β — значні за величиною і свідчать про витрати на співробітників; μ — не може бути великим, бо фірма середня.

Доповнюючи (в сенсі стратегії моделювання) попереднє, повернемо свою увагу до варіанту, коли величини μ і γ мало різняться. На рис. 8 і 9 приводяться результати числових розрахунків для $\gamma = 5$ і $\mu = 4,8$. З часом настає стійкий граничний цикл.

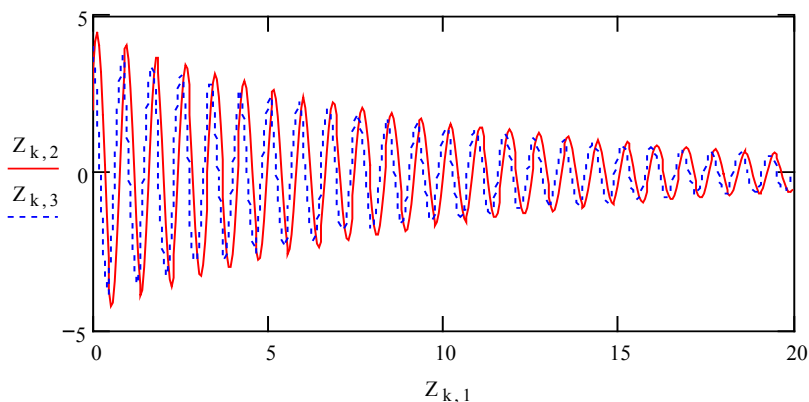


Рис. 8. Еволюція числа працівників ($x(t) = Z_{k,2}$) і капіталу ($y(t) = Z_{k,3}$) фірми з часом

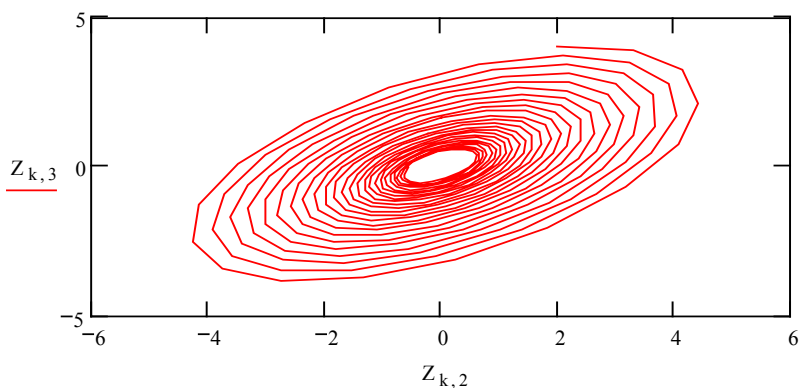


Рис. 9. Фазовий портрет діяльності фірми —
граничний цикл

Насамкінець, подамо аналітичний розв'язок кластерної ММ(1), записавши її у векторно-матричній формі

$$\dot{\bar{Z}} = A * \bar{Z} + \bar{b}, \quad (2)$$

де $\bar{Z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ — вектор-стовпець змінних, $\dot{\bar{Z}} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$ — вектор-стовпець похідних змінних, матриця $A = \begin{pmatrix} -m & a \\ b & -n \end{pmatrix}$ числових параметрів ММ і постійний вектор-стовпець $\bar{b} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$, що відображає наміри сторін.

Якщо $\bar{Z}(0) = \bar{c}$ є вектор початкових умов, то аналітичний розв'язок ММ(2) записується

$$\bar{Z} = e^{A*t} * \bar{c} + A^{-1} * \bar{b} * (e^{A*t} - E),$$

оскільки виконується наступне:

$$e^{A^*t} * (\dot{\bar{Z}} - A^* \bar{Z}) = \frac{d}{dt} (e^{-A^*t} * \bar{Z}) = e^{-A^*t} * b ;$$

$$\bar{Z} = e^{A^*t} * \bar{c} + \int_0^t e^{A^*(t-s)} * b \, ds ;$$

інтеграл після ланцюжка очевидних перетворень набуває вигляду:

$$\begin{aligned} e^{A^*t} * b * \int_0^t e^{-A^*s} \, ds &= e^{A^*t} * b * (-A^{-1}) \int_0^t e^{-A^*s} \, d(-A^*s) = \\ &= e^{A^*t} * b * (-A^{-1}) * e^{-A^*s} \Big|_0^t = A^{-1} * b * (e^{A^*t} - E). \end{aligned}$$

Для кластерної ММ вигляду

$$\dot{\bar{Z}} = A^* \bar{z} + \bar{b}(t) ; \quad \bar{Z}(0) = c , \quad (2a)$$

що відповідає урахуванню природних можливостей визначення величин r і s , аналітичний розв'язок записується [9]:

$$\bar{Z} = e^{A^*t} * \bar{c} + \int_0^t e^{A^*(t-s)} * b(s) \, ds .$$

Щоб провести комп'ютерне моделювання, треба вміти обчислювати матричну експоненту e^{A^*t} .

Висновки. З'ясовано, що деякі різноманітні за змістом соціально-економічні явища описуються однією і тією ММ, для якої записано аналітичний розв'язок. Широкомасштабний обчислювальний експеримент над кластерною моделлю показав існування граничного циклу для одного практично важливого випадку. Також здійснено числове моделювання конфлікту двох сторін, досліджено варіанти ефективного їх примирення.

Література

1. Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия / Гл. ред. Ю. В. Прохоров. — М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. — 910 с.
2. Саати Т. Л. Математические модели конфликтных ситуаций. — М.: Сов. радио, 1977. — 304 с.
3. Плотинский Ю. М. Математическое моделирование динамики социальных процессов. — М.: МГУ. 1992. — 133 с.
4. Шикин Е. В., Чхартишвили А. Г. Математические методы и модели в управлении: Учеб. пособие. — 2-е изд., испр. — М.: Дело, 2002. — 440 с.
5. Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Колебания и волны / Изд. 2-е, исп. и доп. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 224 с.
6. Пугачев Е. Г., Соловьев К. Н. Самоорганизация социально-экономических систем. — Иркутск: Байкал. гос. ун-т экономики и права, 2003. — 172 с.
7. Менишников С. М. Клименко Л. А. Длинные волны в экономике. Когда общество меняет кожу? — М.: Междунар. отношения, 1982. — 189 с.
8. Шаповалов В. И., Каблов В. Ф., Башмаков В. А., Авакумов В. Е. Синергетическая модель устойчивости средней фирмы / В кн. «Синергетика и проблемы теории управления». Под ред. А. А. Колесникова. — М.: Физматлит, 2004. — С. 454—464.
9. Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 368 с.

Статтю подано в редакцію 17.03.09 р.

УДК 004.78:336.71

В. С. Сидоренко,
начальник сектору супроводження
серверного програмного забезпечення
ТОВ «Укрпромбанк»

ПЕРСПЕКТИВНІ МОДЕЛІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ БАНКІВСЬКОЇ ІНФОРМАЦІЇ

В статті розглянуто моделі даних, що сьогодні найчастіше використовуються для представлення економічної інформації. Розглянуто також природу економічної інформації в аспекті її формалізації та виділено її характерні риси. Пока-