

4. Stewart, T. A. (1997), *Intellectual Capital — The New Wealth of Organizations*, Doubleday, New York., NY, USA.
5. Pulic, A. (2004). An Accounting Tool for IC Management. Available at: <http://www.vaicon.net>
6. Lim, S., Macias, A. J., Moeller, T. Intangible Assets and Capital Structure (June 4, 2018). Paris December 2016 Finance Meeting EUROFIDAI — AFFI. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2514551>
7. Zadeh, L.A., Fu, K.S., Tanaka K. and Shimura, M. eds., *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognhivе and Decision Processes*. Academic Press, New York, 1975.

Статтю подано до редакції 31.10.2018 р.

УДК 519.86 +330.46

Коляда Ю. В., кандидат технічних наук, доцент,
професор кафедри економіко-математичного моделювання,
ДВНЗ «Київський національний економічний
університет імені Вадима Гетьмана»
Шатарська І. Ф., Старший викладач кафедри
економіко-математичного моделювання,
ДВНЗ «Київський національний економічний
університет імені Вадима Гетьмана»

Jury Kolyada, PhD (Technical Sciences), Docent,
Associate Professor, Department of Economic and Mathematical Modeling
SHEE "Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman"
Inna Shatarska, Department of Economic and Mathematical Modeling
SHEE "Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman"

ДИНАМІЧНА ТРАЄКТОРІЯ ЕКОНОМІЧНОГО РИЗИКУ НА ПІДГРУНТІ МОДЕЛІ ВОЛЬТЕРРИ-ЛОТКИ

DYNAMIC TREATY OF ECONOMIC RISK ON LOTKA — VOLTERRA MODEL BACKGROUND

Анотація. Оцінювання ризику економічної події завжди привертало увагу широкого загалу економістів. Результати (підходи, прийоми) щодо вирішення зазначеної проблеми базувалися на застосуванні теорії економічної рівноваги, теорії ймовірностей та математичної статистики. Ця проблема залишається актуальною й досі, бо запити прикладної економіки на перший план висувають знання динаміки змінюваності подій,

уміння передбачати характер їхнього розвитку в процесі переходу від одного економічного стану до іншого. Щоб мати дієвий інструмент, адекватний вимогам нелінійної глобальної економіки, слід навчитися використовувати динамічні моделі економічних процесів та явищ.

Раніше була розглянута траєкторія економічного ризику для випадку логістичної одновимірної динамічної моделі. Зазначений результат, який принципово відрізняється від загальновживаного підходу в теорії економічного ризику, потребує поширення на випадок двовимірних (площинних) динамічних моделей економіки.

Крім того, на підставі аналітичної залежності зв'язку ризику та інерційності економічної системи, приметними рисами її успішного функціонування, була встановлена можливість характеризувати стабільність цього процесу або можливість настання кризи.

Використовуючи вище зазначені методи з урахуванням системного характеру нелінійних взаємовпливів чинників економічної системи, динамічною моделлю яких є класична модель нелінійної динаміки (модель «жертва-хижак») — система рівнянь Вольтерри-Лотки, в роботі отримано аналітичну формулу для обчислення кількісної міри ризику настання події, яка відповідає поведінці «жертви» у довільний момент часу. Бо ця динамічна модель антагоністичного характеру знайшла багато різноманітних застосувань і стала класичною для теорії та практики математичного моделювання економічних процесів, а структурно вона нагадує класичну одновимірну логістичну модель, будучи її узагальненням — два пов'язаних між собою рівняння логістичного виду.

Ключові слова: нелінійна економіка, модель «жертва-хижак», динаміка економічного ризику.

Abstract. The evaluation of risk of economic event has always attracted the attention of a wide range of economists. The results (approaches, techniques) for solving this problem were based on the application of the theory of economic equilibrium, probability theory and mathematical statistics.

This problem is still relevant. Because the demands of the applied economy bring knowledge of the dynamics of the variability of events on the foreground and the ability to predict the nature of their development in the process of transition from one economic state to another. It is necessary to learn how to use dynamic models of economic processes and phenomena in order to have an effective tool that is adequate to the requirements of a nonlinear global economy.

The economic risk trajectory for a logistic one-dimensional dynamic model was considered earlier. The result, which fundamentally differs from the generally applicable approach in the theory of economic risk, needs to be extended in the case of two-dimensional (planar) dynamic economic models.

In addition, the ability to characterize the stability of this process or the possibility of a crisis has been established. It is based on the analytical dependence of the risk communication and the inertia of the economic system, the hallmarks of its successful functioning.

We obtained an analytical formula for assessing the quantitative risk level of an event that corresponds to the behavior of the predator at an arbitrary time after using the above methods, taking into account the systemic nature of the nonlinear interactions of factors of the economic system, the dynamic model of which is the classic model of nonlinear dynamics ("predator- prey" model") — the Lotka-Volterra system of equations. Because this dynamic model of antagonistic nature has found many different applications and became classical for the theory and practice of mathematical modeling of economic processes, structurally it resembles the classical one-dimensional logistic model, being its generalization — two related equations of logistic kind.

Key words: nonlinear economy, predator-prey model, economic risk dynamics.

Постановка задачі. Оцінювання ризику економічної події завжди стояло в центрі уваги широкого загалу економістів [1,2]. Результати (підходи, прийоми) щодо вирішення зазначеної проблеми базувалися на застосуванні теорії економічної рівноваги, теорії ймовірностей та математичної статистики. Слід віддати належне превентивному і всесторонньому вербальному аналізу питання оцінювання економічного ризику. Але ця проблема залишається актуальною й досі, бо запити прикладної економіки на перший план висувають знання динаміки змінюваності подій, уміння передбачати характер їхнього розвитку в процесі переходу від одного економічного стану до іншого.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У зазначених вище працях [1,2] наводиться змістовна бібліографія щодо економічного ризику. Наведені там роботи ґрунтуються на концептуальних засадах теорії рівноважного економічного стану. Практика сьогодення вказує: щоб мати дієвий інструмент, адекватний вимогам нелінійної глобальної економіки, слід навчитися використовувати динамічні моделі економічних процесів та явищ.

Траєкторія економічного ризику для випадку логістичної одновимірної динамічної моделі була розглянута у повідомленні [5]. Зазначений результат, який принципово відрізняється від загальновживаного підходу в теорії економічного ризику, потребує поширення на випадок двовимірних (площинних) динамічних моделей економіки.

Постановка завдання. На підставі методики результатів [4], з урахуванням системного характеру нелінійних взаємовпливів чинників економічної системи, динамічною моделлю яких є система рівнянь Вольтерри-Лотки, отримати аналітично формулу оцінювання кількісної міри ризику у довільний момент часу.

Викладення основного матеріалу дослідження. Динамічна система рівнянь Вольтерри-Лотки [3], яка в літературі відома як модель «жертва-хижак», має вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy, \\ \dot{y} = -cx + dxy, \end{cases} \quad (1)$$

де змінні $x = x(t)$ та $y = y(t)$ є відповідно «жертвою» та «хижаком» з певними початковими умовами $x_0 = x(t_0)$ та $y_0 = y(t_0)$;

їх похідні $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ та $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ по незалежній змінній t є швидкостями змінюваності обсягів популяцій;

коефіцієнти a, b, c, d є певними скалярними величинами.

Структурно ця модель нагадує класичну одновимірну логістичну модель, будучи її узагальненням — два рівняння логістичного виду пов'язані між собою.

Динамічна модель (1) антагоністичного характеру знайшла багато різноманітних застосувань і стала класичною для теорії та практики математичного моделювання [3] економічних процесів. Наприклад, в економіці спостерігається антагонізм між виробничою діяльністю та її оподаткуванням, адже розміром податку можна стимулювати виробництво або його пригнічувати.

Заміною змінних: $x = \frac{a}{d}u, y = \frac{a}{b}v, t = \frac{\tau}{a}, \gamma = \frac{c}{a}$, переходимо до безрозмірної динамічної моделі [6] з одним скаляром γ :

$$\begin{cases} \dot{u} = u - uv, \\ v = -\gamma v + uv, \end{cases} \quad (2)$$

де $u = u(\tau), v = v(\tau), \dot{u}, \dot{v}$ — перші похідні по змінній τ .

Діленням першого рівняння на друге матимемо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dv} &= \frac{u(1-v)}{v(-\gamma+u)}, \\ \frac{du}{u(-\gamma+u)} &= \frac{(1-v)dv}{v}. \end{aligned} \quad (3)$$

Оскільки виконується умова розкладання дробу:

$$\frac{du}{u(-\gamma+u)} = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{du}{u} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{du}{u-\gamma},$$

то загальний інтеграл диференціального рівняння запишеться таким чином:

$$u^{-1/\gamma} \cdot (u-\gamma)^{1/\gamma} = e^{-v} \cdot v \cdot C, \quad (4)$$

де величина C — стала інтегрування, визначена за допомогою початкових умов $x_0 = x(t_0)$ та $y_0 = y(t_0)$ динамічної моделі (1) та відповідних замін змінних.

Після піднесення до степеня γ та алгебраїчних перетворень отримаємо вираз:

$$1 - \frac{\gamma}{u} = C^\gamma \cdot v^\gamma \cdot e^{-\gamma v},$$

який дозволяє записати аналітичну функцію, яка характеризує поведінку «жертви» в залежності від поведінки «хижака»:

$$u = \frac{\gamma}{1 - C\gamma \cdot v\gamma \cdot e^{-\gamma v}} \quad (5)$$

Як вже зазначалось у [4], зв'язок між ризиком та інерційністю економічної системи, прикметними рисами її успішного функціонування, оцінюється за формулою:

$$Risk(C_k) = \frac{P_{max} - P_{min}}{(P_{max} + P_{min})/2}, \quad (6)$$

де P — певний показник ефективності функціонування економічної системи впродовж проміжку часу $[t_0; T]$, P_{max} , P_{min} — відповідно є максимальним і мінімальним значенням цього показника за досліджуваний період.

Унаслідок алгебраїчних перетворень формула (6) набере виду:

$$Risk(P) = 2 - \frac{4}{\frac{P_{max}}{P_{min}} + 1}, \quad (7)$$

Якщо розглядати процес розвитку довільного економічного об'єкту, то на підставі цієї формули можна характеризувати стабільність цього процесу або можливість настання кризи:

- коли $P_{max} = P_{min}$, то $Risk(P) = 0$, що є цілком природньо — ніякого ризику для усталеного розвитку економічної системи немає;

- для $\frac{P_{max}}{P_{min}} = 3$ маємо $Risk(P) = 1$;

- якщо величина P_{max} зростає, то відношення $\frac{P_{max}}{P_{min}}$ і знаменник дробу збільшується, а дріб зменшується, тобто $Risk(P) \rightarrow 2$.

Тобто маємо числовий критерій настання кризи в процесі усталеного розвитку економічної системи. Дійсно, якщо інтерпретувати відношення $\frac{P_{max}}{P_{min}}$ як ступінь поділу населення на багатих і бідних, тобто поляризації суспільства, то формула (7) вказує на зародження і розвиток стану соціальної кризи.

Використовуємо формулу кількісної міри ризику (6), яка для дослідження моделі поведінки «жертви» набуває виду:

$$Risk = \frac{u_{max} - u_{min}}{\frac{u_{max} + u_{min}}{2}}. \quad (8)$$

Вочевидь, що $u_{min} = \gamma$, тоді як $u_{max} = \frac{\gamma \cdot e^{\gamma v}}{e^{\gamma v} - C^{\gamma} \cdot v^{\gamma}}$.

Після підстановки цих виразів до (8) та алгебраїчних перетворень отримаємо вираз для обчислення кількісної міри ризику настання події, яка відповідає поведінці «жертви»:

$$Risk = \frac{2\gamma C^{\gamma} \cdot v^{\gamma}}{2\gamma e^{\gamma v} - \gamma C^{\gamma} \cdot v^{\gamma}};$$

$$Risk = \frac{2}{\frac{2e^{\gamma v}}{C^{\gamma} \cdot v^{\gamma}} - 1}. \quad (9)$$

Звідки випливає, що кількісна міра ризику динамічної траєкторії $u(\tau)$ в залежності від поведінки «хижака» $v(\tau)$, має відповідну оцінку знизу:

$$Risk \geq \left(\frac{Cv}{e^v}\right)^{\gamma}, \quad (10)$$

де величина C є сталою, а значення функції $v(\tau)$ розраховується у процесі комп'ютерного моделювання.

Прологарифмувавши обидві частини нерівності, матимемо:

$$\ln Risk \geq \gamma(\ln C + \ln v - v). \quad (11)$$

Перевага нерівності (11) у системі кількісних оцінок міри ризику проявляється в тому, що компоненти γ , $\ln C$ є визначеними раніше величинами, а значення функцій v та $\ln v$ обчислюються в процесі комп'ютерного моделювання.

Отже, матимемо динамічну траєкторію ризику еволюції подій, описуваних функцією $u = u(\tau)$ у моделі «жертва-хижак».

Висновок. На підґрунті класичної моделі нелінійної динаміки — системи рівнянь Вольтерри-Лотки отримано аналітичну формулу оцінювання кількісної міри ризику поведінки «жертви» у довільний момент часу.

Література

1. Вітлінський В.В., Великоіваненко Г.І. Ризикологія в економіці та підприємництві: Монографія. — К.: КНЕУ, 2004. — 480 с.
2. Ю.В. Коляда, І.Ф. Шатарська «Кількісне оцінювання ризику для амплітуди динамічної траєкторії ризикостійкості маркетингової стратегії» / «Моделювання та інформаційні системи в економіці» Збірник наукових праць № 92 — К.: КНЕУ. — 2016. — С. 149–158.
3. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов — [2-е изд., испр]. — М.: Физматлит, 2005. — 320 с.
4. Коляда Ю.В., Шатарська І.Ф. «Апроксимація числової міри зв'язку між ризиком та інерційністю економічної системи» / збірник матеріалів Шостої Міжнародної науково-практичної конференції «Моніторинг, моделювання та менеджмент емерджентної економіки», Оdesa, 24–26 травня 2017 р, с. 199–203.
5. Коляда Ю.В., Шатарська І.Ф. «Динаміка економічного ризику для класичної логістичної моделі» / Збірник матеріалів XI науково-практичної конференції «Моделювання та прогнозування економічних процесів», Київ, НТУУ КПІ, 2017 р., С. 43–45.
6. В.В. Вітлінський, Ю.В. Коляда, Т.В. Кравченко. Моделі економічної динаміки: навч. посіб. [Електронний ресурс] — К.: КНЕУ, 2018. — 332 с.

References

1. Vitlins'kyj V.V., Velykoivanenko H.I. Ryzykologhiia v ekonomitsi ta pidpriemnytstvi: Monohrafiia. — K.: KNEU, 2004. — 480 s.
2. Yu.V. Koliada, I.F. Shatars'ka «Kil'kisne otsiniuvannia ryzyku dlia amplitudy dynamichnoi traiektorii ryzykostijkosti marketynhovoї stratehii»/ «Modeliuvannia ta informatsijni systemy v ekonomitsi» Zbirnyk naukovykh prats' № 92 — K.: KNEU, 2016, stor. 149–158.
3. Samarskyj A.A. Matematycheskoe modelyrovanye: Ydey. Metody. Prymery / A.A. Samarskyj, A.P. Mykhajlov — [2-e yzd., yspr]. — M.: Fyzzmatlyt, 2005. — 320 s.
4. Koliada Yu.V., Shatars'ka I.F. «Aproksymatsiia chyslovoi miry zv'iazku mizh ryzykom ta inertsijnistiu ekonomichnoi systemy» / zbirnyk materialiv Shostoї Mizhnarodnoi naukovopraktychna konferentsii «Monitorynh, modeliuvannia ta menedzhment emerdzhentnoi ekonomiky», Odesa, 24–26 travnia 2017 r, s. 199–203.
5. Koliada Yu.V., Shatars'ka I.F. «Dynamika ekonomichnoho ryzyku dlia klasychnoi lohistychnoi modeli» / Zbirnyk materialiv KhI naukovopraktychnoi konferentsii «Modeliuvannia ta prohnouzuvannia ekonomichnykh protsesiv», Kyiv, NTUU KPI, 2017r., s. 43–45.
6. V.V. Vitlins'kyj, Yu.V. Koliada, T.V. Kravchenko. Modeli ekonomichnoi dynamiky: navch. posib. [Elektronnyj resurs] — K.: KNEU, 2018. — 332 s.

Статтю подано до редакції 5.11.2018 р.