

І. А. Джалладова, доцент,
ДВНЗ «Київський національний економічний
університет імені Вадима Гетьмана»

ТЕОРІЯ МНОГОВИДІВ У АНАЛІЗІ ДАНИХ

АНОТАЦІЯ. У статті розглядаються основні поняття, методи, задачі теорії многовидів у розрізі їх застосування до розв'язання задач багатовимірного аналізу даних, метою якого є знаходження прихованих закономірностей у хаосі експериментальних даних, а також боротьба з «прокляттям» розмірності.

SUMMARY. In the article considering basic definitions, methods, problems of multiform theory in slash using to manifold analyze date, which have main idea finding stow low in chaos experiment date and also struggle with imprecation demand.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: асимптотична стійкість систем, інтегральний многовид розв'язків, оптимізація, стохастичні системи.

ВСТУП

У статті [10] було розглянуто основні поняття, методи, задачі багатовимірного аналізу даних, головною метою якого є знаходження прихованих закономірностей у хаосі експериментальних даних, а також окреслено сучасні підходи до моделювання, математичного аналізу та інтерпретації експерименту, проаналізовано вдосконалене програмне забезпечення, що використовується в усьому світі. З огляду на продовження тематики сучасних підходів у аналізі даних пропонується підхід, який ураховує властивості більшої інформативності, стійкості та взаємної незалежності порівняно з традиційними багатовимірними методами. Інтерпретація здобутих результатів крім більшої точності та змісту відрізняється можливістю моделювання та перевірки принципово нових гіпотез про причини явищ, що розглядаються. Змістовні недоліки моделювання за великих розмірностей нагромаджуються, а сама постановка оптимізаційних задач припиняє відбивати сутність справи. Виникає парадокс: чим більше враховано факторів, тим гірше стає модель. Велика кількість змінних свідчить про те, що в задачі не враховано і не виокремлено головне. Усе це потребує зміни підходів. Відмова від детальної інформації здається неминучою, але це не здавання позицій. Наближені відповіді в

реальних умовах виявляються достатньо точними та практично не залежать від «подробиць». Тож доходимо **системного аналізу та теорії оптимальних рішень**: асимптотичних методів, імовірнісних моделей, що описуються звичайними диференціальними та різницевиими рівняннями з випадковими коефіцієнтами, стійкості та керованості таких імовірнісних моделей, аналізу моментних рівнянь для стохастичних систем

Друга проблема: феномен стабілізації нелінійних функцій за більших розмірностей істотно впливає на розуміння та трактування задач оптимізації. Простіше кажучи, теореми про стабілізацію дають гарантію, що всі вибрані розв'язки однакові за якістю, а коло оптимуму дуже мале. Більше того, наявність оптимуму практично нічого не дає, тому що маленькі помилки обчислювання та реалізації відкидають значення цільової функції в область середніх значень. Так приходимо до використання *апарату функцій Ляпунова* для побудови оптимальних розв'язків. Усі розглянуті методи відбивають нові підходи та напрями аналізу даних.

Теорія ймовірностей та математична статистика виникли в процесі розв'язування задач, які мають імовірнісну природу початкових даних. Їх узагальнюють методи багатовимірного аналізу даних та прикладної статистики, які дають можливість вивчати ймовірнісну та геометричну природу даних.

Велика кількість спостережень привела до розуміння необхідності створення баз даних. Ще в 1960—1970-ті роки з'явилась потреба відокремлення процесу введення даних від їх аналізу. У процесі керування або прогнозування на основі аналізу неповної інформації в умовах невизначеності виникає необхідність у використанні методів багатовимірного аналізу для побудови моделей.

Принципова відмінність методів багатовимірного аналізу даних від методів теорії ймовірностей та математичної статистики в тому, що об'єкти розглядаються з урахуванням не одного-двох, а одночасно деякої множини ознак.

Розвиток багатовимірного аналізу даних розпочався в 1904 р. з праць К. Пірсона та Ч. Спірмена. Методи багатовимірного аналізу даних базуються на поданні інформації в багатовимірному ознаковому просторі і дозволяють визначити неявні, але об'єктивно існуючі закономірності в організаційній структурі й тенденціях розвитку досліджуваних явищ і процесів. Звичайно обробляються багатовимірні сукупності від розмірності 2 до 33. В аналізі даних узагальнюються методи перевірки статистичних гіпотез, статистичного оцінювання, дисперсійний, кореляційно-регресійний та інші розділи математичної статистики на багато-

вимірний випадок. Крім того, у багатовимірному аналізі даних розглядаються методи стискування інформації, класифікації, зниження розмірності досліджуваного ознакового простору і відбір найбільш інформаційних показників. У використанні моделей, що описуються диференціально-різницевиими рівняннями, доречно вводити сучасний математичний апарат, наприклад, методи *теорії побудови многовидів*, розроблені, зокрема, професором К. Г. Валєєвим та вдосконалені в працях його учнів.

Постановка завдання: *проблема розмірності в багатовимірних дослідженнях*. Дослідник часто зустрічається з «прокляттям розмірності» — коли бажано працювати не з n , а з m змінними, оскільки:

- 1) потрібне наочне подання (візуалізація) даних, що досягається їх проєкціюванням;
- 2) необхідно спрощувати статистичні моделі для інтерпретації;
- 3) треба стиснути інформацію в базі даних без втрати її інформативності.

Розглянемо детальніше один з нових напрямів аналізу даних, який застосовується для дослідження математичних моделей — диференціальних та різницевих рівнянь. Для розв'язування багатьох задач можна зменшити кількість розглядуваних рівнянь, тобто звести систему рівнянь до системи меншого порядку, що спрощує розв'язання задачі. Ідею зменшення кількості рівнянь називають *принципом зведення*. Наведемо здобуті результати з застосування принципу зведення в процесі дослідження стійкості розв'язків диференціальних систем рівнянь. У багатьох випадках виникає задача про стійкість нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь, яка після перетворень набуває вигляду

$$\frac{dX}{dt} = AX + \mu F(X, \mu), \quad F(0, \mu) \equiv 0, \quad (1)$$

де $F(X, \mu)$ — вектор-функція, розкладається в ряд за степенями малого параметра μ і диференційована достатню кількість разів за X, μ . Було доведено, що велику роль у поданні розв'язку у вигляді розкладу в ряд за малим параметром відіграє стійкість розв'язків породжуючої системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad (2)$$

яка, у свою чергу, залежить від розміщення на комплексній площині коренів характеристичного рівняння

$$\det(E\lambda - A) = 0. \quad (3)$$

Якщо всі корені $\lambda_j(A)$ рівняння (3) лежать у лівій півплощині $\operatorname{Re} \lambda < 0$, то нульовий розв'язок системи (1) — асимптотична стійкість для досить малих значень $|\mu| < \mu_0$. Якщо хоча б один з коренів рівняння (3) має додатну дійсну частину, то розв'язок системи (1) нестійкий. Залишався малодосліджений випадок, коли $\operatorname{Re} \lambda_j(A) \leq 0$ і частина характеристичних показників системи рівнянь (2) розміщена на уявній осі. Цей випадок дістав назву критичного.

Основні підходи до розв'язання наявних проблем

У праці О. М. Ляпунова [6] був зазначений метод побудови системи диференціальних рівнянь виду

$$\frac{dX_1}{dt} = A_1 X_1 + \mu F_1(X_1, \mu), \quad \dim X_1 < \dim X, \quad (4)$$

меншої розмірності, ніж розмірність системи рівнянь (1). При цьому стійкість нульового розв'язку системи (1) рівнозначна стійкості нульового розв'язку системи (4). Усі власні числа матриці A_1 лежать на уявній осі і збігаються із суто уявними числами матриці A . Змінні X_1 дістали назву критичних змінних. Звичайне дослідження стійкості нульового розв'язку системи (4) принципово простіше, ніж дослідження стійкості нульового розв'язку системи (1). О. М. Ляпунов виклав докладно метод дослідження стійкості для одного нульового кореня характеристичного рівняння, тобто $A_1 = 0$, $\dim X_1 = 1$, і для пари суто уявних коренів, тобто $\lambda_j(A_1) = \pm i\omega$, $\dim X_2 = 2$.

Перехід від системи рівнянь (1) до системи рівнянь меншої розмірності (4) було названо зведенням, а сама ідея зменшення розмірності системи рівнянь (1) зі збереженням властивості стійкості дістала назву принципу зведення Ляпунова.

Основна ідея Ляпунова полягала в побудові інтегрального многовиду розв'язків системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= A_1 X_1 + \mu F_1(X_1, X_2, \mu), \quad \operatorname{Re} \lambda_j(A_1) = 0, \\ \frac{dX_2}{dt} &= A_2 X_2 + \mu F_2(X_1, X_2, \mu), \quad \operatorname{Re} \lambda_j(A_2) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

виду $X_2 = \mu \Phi(X_1, \mu)$. Некритичні змінні X_2 виражаються через критичні змінні X_1 на многовиді $X_2 = \mu \Phi(X_1, \mu)$. Для цього шукається вектор-функція $\Phi(X_1, \mu)$ із системи рівнянь

$$\frac{dX_2}{dt} = \mu \frac{D\Phi(X_1, \mu)}{DX_1} \cdot \frac{dX_1}{dt},$$

що на многовиді $X_2 = \mu \Phi(X_1, \mu)$ набуде вигляду

$$A_2 \Phi(X_1, \mu) + F_2(X_1, \mu \Phi(X_1, \mu), \mu) = \frac{D\Phi(X_1, \mu)}{DX_1} (A_1 X_1 + \mu F_1(X_1, \mu \Phi(X_1, \mu), \mu)).$$

Для критичних змінних X_1 дістанемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dX_1}{dt} = A_1 X_1 + \mu F_1(X_1, \mu \Phi(X_1, \mu), \mu). \quad (6)$$

О. М. Ляпунов довів, що стійкість нульового розв'язку системи рівнянь (5) рівносильна стійкості нульового розв'язку системи (6).

Надалі принцип зведення Ляпунова був узагальнений на банахових просторах у працях Е. А. Барбашина, О. Б. Ликової, В. А. Плисса, К. Г. Валєєва та інших.

Асимптотичний метод наближеного інтегрування диференціальних рівнянь був розроблений у роботах Н. Ньютона, Л. Ейлера, К. Гауса, Л. Лагранжа, П. Лапласа, К. Делоне, М. Ліндсмедта, А. Пуанкаре і багатьох інших. Ці методи застосовувалися, як правило, для розв'язування задач небесної механіки, що описувалися канонічними диференціальними рівняннями. Деякі варіанти асимптотичного інтегрування були пов'язані з використанням операції усереднення за часом t :

$$P(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x) dt \equiv \langle F(t, x) \rangle. \quad (7)$$

Операція усереднення застосовувалась у працях Б. Ван-дер-Поля, Л. И. Мандельштама і Н. Л. Папалекси та інших. Ці вчені побудову усередненої системи вже не пов'язували з канонічністю системи диференціальних рівнянь. З іншого боку, метод нормальних форм розробляли у своїх працях А. Пуанкаре, Дж. Баркгоф, К. Загель, А. Д. Бруно, А. П. Маркєєв і багато інших авто-

рів. [6]. З'ясувалося, що асимптотичний метод є способом зведення системи диференціальних рівнянь до нормальної форми. Інший, більш простий і алгоритмічний, метод полягає в застосуванні асимптотичного методу. Дослідження стійкості нульового розв'язку систем виду (6) є складною задачею. Як правило, застосовується другий метод Ляпунова — метод функцій Ляпунова, що розроблявся в працях Е. А. Барбашина, В. І. Зубова, В. Хана, К. Г. Валєєва і багатьох інших.

У київській школі математики М. М. Боголюбов, Ю. О. Митропольський, А. М. Самойленко, І. З. Штокало доклали великих зусиль до створення та розвитку асимптотичного методу наближеного інтегрування диференціальних рівнянь. Була узагальнено операція усереднення

$$\langle f(t) \rangle = \lim_{p \rightarrow 0} p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

де

$$\alpha \neq 0, \langle e^{\alpha t} \rangle = 0.$$

Асимптотичний метод при цьому став придатний для нормалізації системи рівнянь (5), де матриця лінійного наближення A має довільні власні числа, а не тільки суто уявні власні числа, тобто для зведення і відщиплення критичних змінних без попереднього застосування принципу зведення Ляпунова.

У працях [6; 8] розглянуто систему лінійних різницьових рівнянь

$$\sum_{k=0}^N A_k X_{n+k} = 0, \dim A_k = m \times m. \quad (8)$$

Шукається інтегральний многовид розв'язків системи виду

$$X_{n+1} = Q_n X_n. \quad (9)$$

Матриці Q_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) задовольняють матричне різницеве рівняння

$$A_0 + A_1 Q_n + A_2 Q_{n+1} Q_n + \dots + A_N Q_{N-1+n} Q_{N-2+n} Q_n = 0.$$

Позначимо через z_j ($j = 1, \dots, z$) корені мультиплікаторного рівняння

$$\det A(z) = 0, \quad A(z) \equiv \sum_{k=0}^N z^k A_k,$$

а через C_j — власні вектори матричного пучка $A(z)$, які знаходять з рівнянь

$$A(z_j)C_j = 0 \quad (j = 1, \dots, z).$$

Нехай $z_1, \dots, z_m$ — група найбільших за модулем розв'язків. Якщо відповідні вектори $C_1, \dots, C_m$ лінійно незалежні, то майже будь-який розв'язок матричного різницевого рівняння (9) має границю

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n$$

і власні числа матриці Q збігаються з числами $z_1, \dots, z_m$. При цьому система різницевих рівнянь (9) має інтегральний многовид розв'язків

$$X_{n+1} = QX_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (10)$$

Можна показати, що система різницевих рівнянь (8) зводиться до системи рівнянь (10). Для того щоб нульовий розв'язок системи (8) був стійкий (асимптотично стійкий, нестійкий), необхідно і достатньо, щоб нульовий розв'язок системи (10) був стійкий (асимптотично стійкий, нестійкий).

Обґрунтування здобутих результатів

Ми розглядаємо системи нелінійних різницевих рівнянь, до яких зводяться багато задач моделювання,

$$X_{n+1} = X_n + hF_0(X_n) + hF_1(X_{n-1}) + \dots + hF_N(X_{n-N}), \quad (11)$$

де $F_k(X)$ — неперервні і диференційовні вектора-функції. Було доведено, що система різницевих рівнянь (10) зводиться до системи різницевих рівнянь виду

$$X_{n+1} = X_n + h\Phi(X_n, h). \quad (12)$$

Будь-який розв'язок системи (11) для досить малих значень $|h|$ прямує, коли $n \rightarrow +\infty$, до одного з розв'язків системи рівнянь (12).

Отже, звідси випливає, що будь-який чисельний метод інтегрування системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X),$$

наприклад метод Адамса

$$X_{n+1} = X_n + h \sum_{k=0}^N a_k F(t_{n-k}, X_{n-k}), \quad t_n = nh,$$

зводиться до методу Ейлера

$$X_{n+1} = X_n + h\Phi(t_n, X_n, h).$$

Аналогічно методи Рунге—Кутта зводяться до методу Ейлера.

Цікаві ідеї що чисельного інтегрування диференціальних рівнянь були висунуті Ю.В. Ракитським. Зокрема, для чисельного інтегрування системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \quad X \approx X_0$$

було рекомендовано метод інтегрування типу Ейлера

$$X_{n+1} = X_n + BF(X_n), \quad B = \int_0^h e^{At} dt, \quad A = \frac{DF(X)}{DX} \Big|_{X=X_0}.$$

Коли інтегрувалися рівняння руху літака за методом Ракитського для однакового обсягу обчислень і однакової точності, швидкість інтегрування була в 160 разів більше, ніж за методом Рунге—Кутта.

Ми пропонуємо алгоритм чисельного розв'язання системи рівнянь

$$\frac{dX}{dt} = AX + \Phi(X, Y), \quad \Phi(0,0) = 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_j(A) = 0;$$

$$\frac{dY}{dt} = BY + \psi(X, Y), \quad \psi(0,0) = 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_j(B) < 0,$$

де $\Phi(X, Y)$, $\psi(X, Y)$ — диференційовні вектори-функції:

I. Шукається інтегральний многовид розв'язків виду

$$Y = G(X), \quad G(0) = 0.$$

Береться набір координатних функцій

$$Y = G_k(X), \quad G_k(0) = 0 \quad (k = 1, \dots, N)$$

i

$$G(X, \alpha) = \sum_{k=1}^N \alpha_k G_k(X).$$

Вектор $G(X, \alpha)$ задовольняє систему диференціальних рівнянь

$$BG(X, \alpha) + \psi(X, G(X, \alpha)) = \frac{DG(X, \alpha)}{DX} (AX + \Phi(X, G(X, \alpha))). \quad (13)$$

Чисельно шукаються коефіцієнти α_k в розкладанні $G(X, \alpha)$ методом Гальоркіна чи методом колокацій. Для цього задаються точки $X_j (j = 1, \dots, N)$ і знаходять коефіцієнти α_k із систем рівнянь:

$$BG(X_j, \alpha) + \psi(X_j, G(X_j, \alpha)) = \frac{DG(X_j, \alpha)}{DX} (AX_j + \Phi(X_j, G(X_j, \alpha)))$$

$$(j = 1, \dots, N). \quad (14)$$

II. Чисельно інтегрується система рівнянь (13) з випадково заданими початковими даними $X_{0j}, Y_{0j} (j = 1, \dots, N)$ для $t = 0$. За досить велике $T > 0$ знаходять значення $X_j(T), Y_j(T) (j = 1, \dots, N)$ і за допомогою інтерполяційних формул дістають $Y = G(X)$. Стійкість нульового розв'язку системи (14) наближено відповідає стійкості нульового розв'язку системи

$$\frac{dX}{dt} = AX + \Phi(X, G(X)).$$

III. Синтез оптимального керування здійснюється за допомогою принципу зведення. Нехай шукається оптимальне керування $U = U(X)$ у системі диференціальних рівнянь

$$\frac{dX}{dt} = F(X, U), \quad F(0, 0) \equiv 0, \quad \dim X = m,$$

яке мінімізує інтегральний функціонал

$$J = \int_0^{\infty} w(X(t), U(t)) dt.$$

Нехай систему неявних рівнянь

$$\psi \frac{DF(X, U)}{DU} + \frac{Dw(X, U)}{DU} = 0 \quad (15)$$

розв'язано відносно $U = \Phi(X, \psi)$. Необхідні умови оптимальності приводять до відомої системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= F(X, \Phi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\psi \frac{DF(X, \Phi)}{DX} - \frac{Dw(X, \Phi)}{DX}, \quad \Phi = \Phi(X, \psi). \end{aligned} \quad (16)$$

З усього многовиду розв'язків системи (16), що має розмірність $2m$, лише інтегральний многовид розмірності m прямує при $t \rightarrow +\infty$ до нульового розв'язку $X = 0, \psi = 0$. Щоб чисельно знайти цей многовид, задано кілька точок $X_k(0), \psi_k(0)$ в околі нульового розв'язку $X = 0, \psi = 0$, і треба зінтегрувати систему рівнянь (16) назад. Під час інтегрування на кожному кроці $U(t) = \Phi(X(t), \psi(t))$ знаходиться чисельно із системи рівнянь (15). Нехай знайдено точки $X_k(-T_k), \psi_k(-T_k), U_k(-T_k), T_k > 0$. Синтез оптимального керування зводиться до відновлення вектора-функції $U = U(X_k)$ за знайденими точками $X_k(-T_k), U_k(-T_k)$.

Розглядається система диференціальних рівнянь із запізненням аргументу

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(t, X(t), X(t-\tau)), \quad \tau > 0, \quad (17)$$

що має нульовий розв'язок, тобто $F(t, 0, 0) \equiv 0$. Пропонується метод дослідження стійкості нульового розв'язку з досить малим запізнюванням аргументу. Метод ґрунтується на зведенні системи рівнянь (17) до системи рівнянь без запізнювання аргументу. Система рівнянь (17) має скінченновимірний многовид розв'язків, який можна звести до скінченновимірного многовиду розв'язків.

Рівняння із запізненням аргументу розглядалися у працях А. Д. Мишкіса, Р. Беллмана, Н. Н. Красовського, С. Н. Шиманова, В. Хани, Л. Э. Ельсгольца і багатьох інших. Ю.А. Рябов довів, що будь-який розв'язок диференціального рівняння з запізнюванням

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-h)) \quad (18)$$

можна подати деякими спеціальними розв'язками рівняння (18) для досить великого значення t , якщо запізнювання не перевершує де-

якої межі. Ця ідея була істотно узагальнена для системи диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється, у праці К. Г. Валєєва і Н. А. Кулеско [7]. Автори досліджують стійкість нульового розв'язку системи диференційно-функціональних рівнянь

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + \mu\Phi(t, X(t+\theta_1), Y(t+\theta_2)), \theta_k \leq 0 \quad (k=1,2);$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = BY(t) + \mu\psi(t, X(t+\theta_3), Y(t+\theta_4)), \theta_k \leq 0 \quad (k=3,4), \quad (19)$$

де $\operatorname{Re} \lambda_j(A) > \alpha$, $\operatorname{Re} \lambda_j(B) < \alpha$, Φ, ψ — функціонали для векторів-функцій $X(t+\theta_k)$, $Y(t+\theta_k)$ для $\theta_k \leq 0$, $\Phi(t, 0, 0) \equiv 0$, $\psi(t, 0, 0) \equiv 0$, вектор-функції $\Phi(t, X(t+\theta_1), Y(t+\theta_2))$, $\psi(t, X(t+\theta_3), Y(t+\theta_4))$ задовольняють умови Ліпшица відносно X, Y . Систему рівнянь (19) за досить загальних припущень можна звести до системи звичайних диференціальних рівнянь виду

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + \mu S(t, X(t), \mu), \quad S(t, 0, \mu) \equiv 0 \quad (20)$$

так, щоб стійкість нульового розв'язку системи (19) буде рівносильна стійкості нульового розв'язку системи (20).

Висновок

Отже, наведені результати показують важливість застосування принципу зведення до моделювання та дальшої інтерпретації результатів, пов'язаних з аналізом даних у багатовимірному просторі. Самі ідеї та практичні рекомендації щодо застосування до розв'язання задач, наприклад стохастичних фінансів, є новими. Крім того, можна відзначити перспективу наукових розробок за даним напрямком, оскільки кількість інформації дедалі більше зростає і необхідні алгоритми до застосування до розроблення прикладних програм.

Література

1. Афіфі А., Єйзен С. Статистичний аналіз: підхід з використанням ОЕМ: Пер. з англ. — М.: Мир, 1982. — 482 с.
2. Kim H. Esbensen. Multivariate Data Analysis // In Practice. — 2000. — 600 р.

3. *Боровиков В.П.* Искусство анализа данных на компьютере: Для профессионалов: 2-е изд. — СПб.: Питер, 2003. — 688 с.
4. *Тьюки Дж.* Анализ результатов наблюдений. Разведывательный анализ. — М.: Мир, 1981. — 693 с.
5. *Дубров А.М., Трошин Л.И.* Многомерные статистические методы: Учебник. — М.: Финансы и статистика, 1998. — 352 с.
6. *Ляпунов А.М.* Общая задача устойчивости движения. — М.: Ростехиздат, 1950. — 472 с.
7. *Валеев К.Г., Кулеско Н.А.* О конечнопараметрическом семействе решений систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. — Т. 20. — № 6. — 1968. — С. 739—749.
8. *Джалладова І.А.* Оптимізація стохастичних систем. — К.: КНЕУ, 2006. — 283 с.
9. *Валеев К. Г., Джалладова І. А.* Операційне числення та його застосування. — К.: КНЕУ, 2003. — 295 с.
10. *Джалладова І. А.* Багатовимірний аналіз даних // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Зб. наук. праць. — Вип. 78. — К.: КНЕУ, 2008. — С. 161—170.

Стаття надійшла до редакції 12.01.09 р.

УДК 330.4: 620.9 (477)

В. Д. Дербенцев, канд. екон. наук, доцент,
докторант кафедри інформатики,
ДВНЗ «КНЕУ ім. Вадима Гетьмана»

Г.В. Бондаренко, ст. викл. кафедри економічної теорії,
Черкаський національний університет
ім. Богдана Хмельницького

МЕТОДОЛОГІЧНІ АСПЕКТИ КІЛЬКІСНОЇ ОЦІНКИ ЕНЕРГЕТИЧНОЇ БЕЗПЕКИ ЕКОНОМІКИ УКРАЇНИ

АНОТАЦІЯ. Робота присвячена питанням аналізу стану забезпеченості енергоносіями та енергоефективності економіки України в порівнянні із європейськими та пострадянськими країнами, а також світом у цілому. Запропоновано методiku кількісного оцінювання стану енергетичної безпеки.

АННОТАЦИЯ. Работа посвящена вопросам анализа состояния обеспечения энергоносителями и энергоэффективности экономики Украины в сравнении с европейскими и постсоветскими странами, а также мира в