

Джалладова І.А., д. фіз.-мат. наук, професор,
професор кафедри комп'ютерної математики та інформаційної безпеки
ДВНЗ «КНЕУ імені В. Гетьмана»

Ружечкова М., к. фіз.-мат. наук, професор,
професор кафедри аналізу, Університет в Білостоці, Польща

Дацюк М.В., студент 4 курсу
за освітньо-професійною програмою «Кібербезпека»,
ДВНЗ «КНЕУ імені В. Гетьмана»

Dzhalladova I.A., Doctor of Science in Physics and Mathematics,
Professor of the Department of Computer Mathematics
and Information Security

SHEI KNEU named after V. Hetman

Růžicková Miroslava, dr hab., professor,

Professor of the Chair of Analysis,

University of Białystok, Poland

Datsiuk M.V.,

student 4 course

for the educational and professional program «Cybersecurity»,

SHEI KNEU named after V. Hetman

НЕМАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ: ПОСТУЛАТИ ТА МОДЕЛЬНІ ПРОБЛЕМИ

NON-MARKOV PROCESSES: POSTULATES AND MODELS PROBLEMS

Анотація. У статті узагальнюються існуючі проблеми і шляхи їх вирішення, пов'язані з конструкцією і впровадженням немарковських процесів. Шлях до адекватного опису систем інформаційного та соціально-економічного плану лежить через побудову теорії теорії немарковських процесів, що описують зміну структур. Визначено, що розглядати немарковські процеси лише як модифікації або виправлення марковських процесів — так само неправильно, як, наприклад, розглядати всі нелінійні динамічні системи як поправки до гармонічного осцилятора. Результати обґрунтовано і сформульовано у таких постулатах: немарковськість — це правило, а марковськість — це виключення; причиною популярності марковських процесів є те, що вони повністю визначаються лише двома станами; фізичний процес (тобто деяке фізичне явище, що розвивається в часі) може бути або не бути марковським, залежно від змінних, які використовуються для його опису; основне рівняння — це рівняння для ймовірності переходу марковського процесу, дійсне для будь-яких початкових часу; для немарковського процесу проблема початкового значення не є чітко визначеною, якщо не буде надано додаткову інформацію про проблему; для немарковських процесів можна сформулювати проблему першого проходження, але її фізична релевантність сумнівна; для рівняння Ланжевена з кольоровим шумом неможливо сформулювати значущу початкову умову чи час першого проходження. В модельних задачах показано унікальні можливості і недоліки, запропонованого інструмента. Дано існуючий і авторський підхід для отримання

мання основного рівняння для визначення немарковського процесу. В подальших дослідженнях будуть розвинуті отримані результати і розв'язані модельні проблеми, які виникли, зокрема, в криптографії, теорії інформації і кодування.

Ключові слова: немарковські процеси; марковськість і немарковськість; стохастичні рівняння; дифузія; випадкове блукання, рівняння Крамерса, кольоровий шум.

Abstract. The article summarizes the existing problems and ways to solve them related to the design and implementation of non-Markov processes. The way to an adequate description of the systems of information and socio-economic plan lies through the construction of a theory of non-Markov processes that describe the change of structures. It is determined that to consider non-Markov processes only as modifications or corrections of Markov processes is just as wrong as, for example, to consider all nonlinear dynamical systems as corrections to the harmonic oscillator. The results are substantiated and formulated in the following postulates: non-Markov is a rule, and Markov is an exception; the reason for the popularity of Markov processes is that they are completely determined by only two states; a physical process (ie, some physical phenomenon that develops over time) may or may not be Markov, depending on the variables used to describe it; the basic equation is the equation for the probability of transition of the Markov process, valid for any initial time moment; for the non-Markov process, the problem of initial value is not clearly defined unless additional information about the problem is provided; for non-Markov processes it is possible to formulate the problem of the first passage, but its physical relevance is doubtful; for the Langevin equation with color noise, it is impossible to formulate a significant initial condition or time of the first pass. The model problems show the unique advantages and disadvantages of the proposed tool. The existing and author's approach to obtain the basic equation for determining the non-Markov process is given. Further research will develop of the obtained results and solve model problems that have arisen in cryptography, information and coding theory.

Keywords: non-Markov processes; main equation; Markov and Non-Markov property; stochastic differential equation; diffusion; random walk; Cramers equations, color noise.

Вступ. Марковські процеси дуже добре вивчено в роботах [1, 2]. Багато робіт з їх застосуванням написано автором [22, 23, 24, 25, 26, 27], досліджуючи стійкість динамічних систем із випадковою структурою. Але шлях до адекватного опису систем інформаційного та соціально-економічного плану лежить через побудову теорії немарківських процесів, що описують зміну структур в умовах невизначеності [5, 28, 29, 30]. Враховуючі, що більшість реальних ситуацій потребують гнучкого підходу, не можна користуватися одним й тим же інструментарієм, хоча й таким що себе добре показав [21].

Взагалі, стохастичний процес — це сукупність випадкових величин X_t , позначених індексом t , який може бути дискретним, але частіше охоплює всі дійсні числа в певному інтервалі.

Стохастичні властивості $\{X_t\}$ виражаються спільними функціями розподілу:

$$\begin{aligned}
 &P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\
 &= \text{імовірність того, що} \\
 &x_1 < X_{t_1} < x_1 + dx_1, x_2 < X_{t_2} < x_2 + dx_2, \dots, x_n \\
 &< X_{t_n} < x_n + dx_n
 \end{aligned} \tag{1}$$

Процес однозначно визначається усією сукупністю цих функцій розподілу для $n = 1, 2, \dots$, яка загалом є нескінченною.

Коли значення $X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_k} = x_k$ задані, інші змінні виконують функції розподілу умовної ймовірності:

$$\begin{aligned}
 &(x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_k, t_k) \\
 P = &\frac{P_n(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k; x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n)}{P(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k)}
 \end{aligned}$$

Це розподіл ймовірностей $X_{t_{k+1}}, \dots, X_{t_n}$, у якому $x_1, \dots, x_k$ виступають параметрами. Візьмемо t_i в хронологічному порядку, тоді процес є марковським, якщо ця умовна ймовірність залежить тільки від останнього значення x_k на t_k і не залежить від попередніх значень $x_{i < k}$. Це повинно виконуватися для всіх n , для будь-якого вибору k , а також для будь-якого $t_1, \dots, t_k$ та $x_1, \dots, x_k$. Якщо це так, усі P_n можна побудувати, коли задані P_1 і P_2 . Наприклад:

$$\begin{aligned}
 &P_3(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) = \\
 &= P(x_3, t_3 | x_1, t_1; x_2, t_2) P_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \\
 &= P(x_3, t_3 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_1, t_1) P_1(x_1, t_1)
 \end{aligned} \tag{2}$$

В сучасній стохастичній математиці термін «марковські процеси» охоплює всі випадкові процеси за виключенням дуже невеликої кількості, яка має властивість марковськості.

Постулат 1: Немарковськість — це правило, а марковськість — це виключення.

Постановка проблеми. Після достатньо глибокого аналізу і роботи з марковськими і напівмарковськими процесами вважаю, що розглядати немарковські процеси лише як модифікації або виправлення марковських процесів — так само неправильно, як, наприклад, розглядати всі нелінійні динамічні системи як поправки до гармонічного осцилятора. Спробуємо постулювати:

Постулат 2. Причиною популярності марковських процесів є те, що вони повністю визначаються лише двома станами. Функція

$P(x_2, t_2 | x_1, t_1)$ має сенс ймовірності переходу з одного стану в інший. Для немарковських процесів функції розподілу (1) мають бути визначені зовсім іншою математичною конструкцією.

Модельна проблема 1. Розглянемо відомий експеримент — симетричне випадкове блукання в одновимірному просторі. [3]. Процес є марковським із симетричною ймовірністю переходу:

$$P(i, t + 1 | i', t) = \frac{1}{2} \delta_{i, i' + 1} + \frac{1}{2} \delta_{i, i' - 1}.$$

Тут $t = 0, 1, 2, \dots$ і x приймає цілі значення i . Але припустимо, що блукаючий має тенденцію зберігати напрямку руху: ймовірність p йти в тому ж напрямку, а q повертатися. Тоді X_t більше не є марковським, оскільки ймовірність X_t залежить не тільки від $x_t - 1$, а й від $x_t - 2$. Це можна виправити, ввівши двокомпонентну змінну $\{X_t, X_{t-1}\}$. Ця спільна змінна знову стає марковською з ймовірністю переходу:

$$P(i_1, i_2, t + 1 | i_1', i_2', t) = \delta_{i_2, i_1'} [p \delta_{i_1 - i_2, i_1' - i_2'} + q \delta_{i_1, i_2'}]$$

Постулат 3. Фізичний процес (тобто деяке фізичне явище, що розвивається в часі) може бути або не бути марковським, залежно від змінних, які використовуються для його опису. Якщо пам'ять нашого випадкового блукаючого включає більше попередніх кроків, потрібні додаткові змінні. Однак це більше не працює, якщо пам'ять поширюється на всі попередні кроки.

Приклад: полімери з відсутнім об'ємом. Ця проблема часто моделюється як випадкове блукання, але вона лишається немарковською і не була вирішена [4].

Таким чином проблема сформульована.

Основний результат. Візьмемо марковський процес, у якому t — час, коли X_t приймає дискретні значення $i = 0, 1, 2, \dots$. У рівнянні (2) візьмемо $t_3 = t_2 + \Delta t$:

$$\frac{P_3(i_1, t_1; i_2, t_2; i_3, t_2 + \Delta t)}{P_1(i_1, t_1)} = P(i_3, t_2 + \Delta t | i_2, t_2) P(i_2, t_2 | i_1, t_1)$$

Підсумуємо i_2 і візьмемо граничне значення, щоб отримати основне рівняння:

$$\dot{P}(i, t | i_1, t_1) = \sum \{W_{i, i'} P(i', t | i_1, t_1) - W_{i', i} P(i, t | i_1, t_1)\} \quad (3)$$

$W_{i,i'}$ є ймовірностями переходу за одиницю часу і є властивостями, що належать фізичній системі (наприклад, квадрати матричних елементів), тоді як P відноситься до стану системи. Параметри i_1, t_1 часто не записуються, яке може призвести до помилкової думки, що P в (3) те саме, що P_1 в (1).

Постулат 4. Основне рівняння — це рівняння для ймовірності переходу марковського процесу, дійсне для будь-яких початкових i_1, t_1 . Якщо додатково знати $P_1(i_1, t_1)$ тобто всю ієрархію (1), то процес однозначно визначений (для $\geq t_1$).

Зауваження. У літературі, наприклад [1], можна зустріти щось, що називається “основне рівняння з пам’яттю”,

$$\dot{P}(i, t | i_1, t_1) = \int_{t_1}^t dt' \sum_{i'} \{W_{i,i'}(t - t')P(i', t' | i_1, t_1) - W_{i',i}(t - t')P(i, t' | i_1, t_1)\},$$

з твердженням, що воно визначає немарковський процес. Але на думку автора:

(I) Немарковський процес не визначений, якщо відомий лише $P(i, t | i_1, t_1)$.

(II) Рівняння не може бути вірним для кожного x_1, t_1 .

(III) Рівняння не гарантує, що процес не є марковським

Модельна проблема 2. Нехай x також неперервне. Тоді $W_{i,i'}$ набуває вигляду інтегрального ядра $W(x | x')$. Якщо процес такий, що протягом нескінченно короткого Δt можливі лише нескінченно малі стрибки, то ядро зводиться до диференціального оператора [6]. Найпростішим прикладом є рівняння дифузії для координати x броунівської частки:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \quad (4)$$

Розв’язком цього рівняння, заданим початковою умовою $P(x, t_1) = \delta(x - x_1)$, є ймовірність переходу $P(x, t | x_1, t_1)$.

Тут координата розглядається як марковська, хоча частка також має швидкість v . Тому слід вважати спільну змінну $\{x, v\}$ марковською з основним рівнянням:

$$\frac{\partial P(x, v, t)}{\partial t} = -v \frac{\partial P}{\partial x} + U'(x) \frac{\partial P}{\partial v} + \gamma \left(\frac{\partial}{\partial v} v P + T \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \right) \quad (5)$$

Це рівняння Крамерса [7]; γ — коефіцієнт тертя, $U(x)$ — зовнішній потенціал.

У цьому рівнянні x сам по собі не є Марковим. Як це поєднується з формулою (4)? Відповідь полягає в тому, що для великих γ зіткнення настільки часті, що розподіл швидкості швидко стає локально максвеллівським:

$$P(x, v, t) \rightarrow P(x, t) \frac{\exp\left[-\frac{v^2}{2T}\right]}{\sqrt{2\pi T}} \quad (6)$$

Це дає можливість усунути v так, щоб залишилося рівняння для $P(x, t)$ саме по собі [7, 1], а саме:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U'(x)}{T} P \right) \right\} + O(\gamma^{-2}) \quad (7)$$

Проблеми при першому проходженні. Розглянемо одновимірну дифузію в потенціальному полі за формулою (7). Нехай воно має місце в скінченному середовищі $x_a < x < x_c$ (рис 1). Коли дифузійна частка починається у внутрішній точці x_b , які шанси, що вона вийде через x_a або x_c , відповідно?

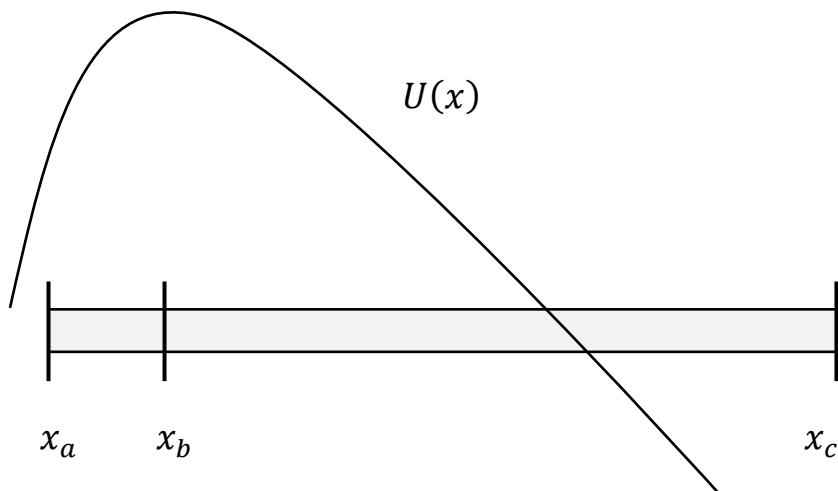


Рис. 1. Одновимірна дифузія в потенціальному полі

Відповідь отримуємо, розв'язавши (7) з граничними умовами поглинання: $P(x_a, t) = 0$ і $P(x_c, t) = 0$ (Розв'язок можна отримати явно завдяки тому, що в рівнянні для ймовірностей час не входить.) Зрозуміло, що коли x_b знаходиться на вершині найвищого максимуму $U(x)$, ймовірність виходу буде дорівнювати п'ятдесят на п'ятдесят. Також можна знайти середній час для будь-якого виходу [2].

У тривимірному просторі проблему можна сформулювати так: Коли я оточую максимум потенціалу закритою поверхнею, то який розподіл ймовірностей точок виходу на цій поверхні і скільки часу це займе? Цю задачу можна сформулювати таким же чином, але, думаю, її неможливо вирішити аналітично.

Однак для частки, описаної в (5), координата не є марковською, і тому недостатньо знати, що $x(t_1) = x_b$: потрібно також знати її попередню історію. У даному випадку ця історія представлена значенням v на t_1 . Звичайно, можна просто вибрати початкову функцію $P_1(x, v, t_1)$, але правильний вибір залежить від проблеми, яку ви хочете вирішити. Наприклад, якщо треба обчислити автокореляційну функцію x :

$$\begin{aligned} \langle x(t_1)x(t_2) \rangle &= \int x_1 x_2 P(x_1 v_1 t_1; x_2 v_2 t_2) dx_1 dx_2 dv_1 dv_2 = \\ &= \int x_1 x_2 P(x_1 v_1 t_1) P(x_2 v_2 t_2 | x_1 v_1 t_1) dx_1 dx_2 dv_1 dv_2 \end{aligned}$$

Очевидно, що для цього потрібно знати правильний початковий розподіл $P_1(x, v, t)$ в межах великого γ його можна замінити на $P_1(x, t_1)$ за допомогою (6).

Постулат 5. Для немарковського процесу проблема початкового значення не є чітко визначеною, якщо не буде надано додаткову інформацію про проблему.

Більший інтерес представляє питання виходу з потенційного мінімуму, такого як x_a на рис. 2. Скільки часу потрібно, щоб подолати бар'єр? Тут неоднозначність початкової швидкості не відіграє ролі, оскільки частка рухається в потенційній частині достатньо довго, щоб переважати Максвелліан (6).

У випадку дифузії, описаної в (7), можна взяти середній час першого прибуття в x_b — і помножити на 2, тому що в x_b однакова

ймовірність втечі або повернення. Середній час першого проходження знову можна обчислити аналітично. Однак у більших вимірах питання таке: Скільки часу потрібно, щоб вийти з мінімуму x_a , оточеного потенційною кривою? Цей середній час визначається найнижчим мінімумом на кривій і доступне елегантне наближення [8].

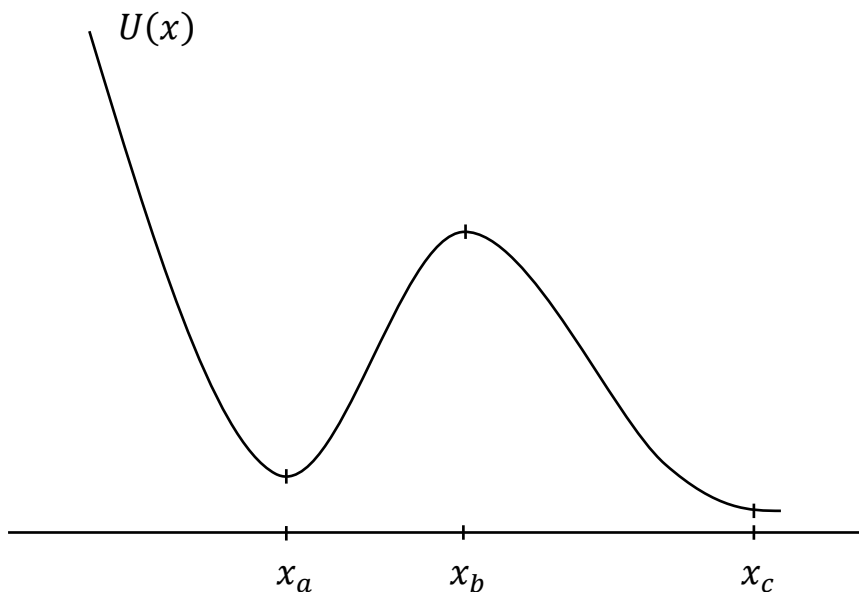


Рис. 2. Виход з потенційного мінімуму

Однак у рівнянні Крамерса (5) недостатньо обчислити час, за який $x(t)$ досягне x_b , оскільки $x(t)$ не є марковським, і неможливо визначити ймовірність подальшої втечі без урахування v . Необхідно переформулювати задачу, вибравши велике x_c і розв'язавши рівняння (5) з граничною умовою: $P(x_c, v, t) = 0$ при $v < 0$ (рис.3). Це проблема Крамерса, яка часто обговорювалася [7,9].

Постулат 6. Для немарковських процесів можна сформулювати проблему першого проходження, але її фізична релевантність сумнівна.

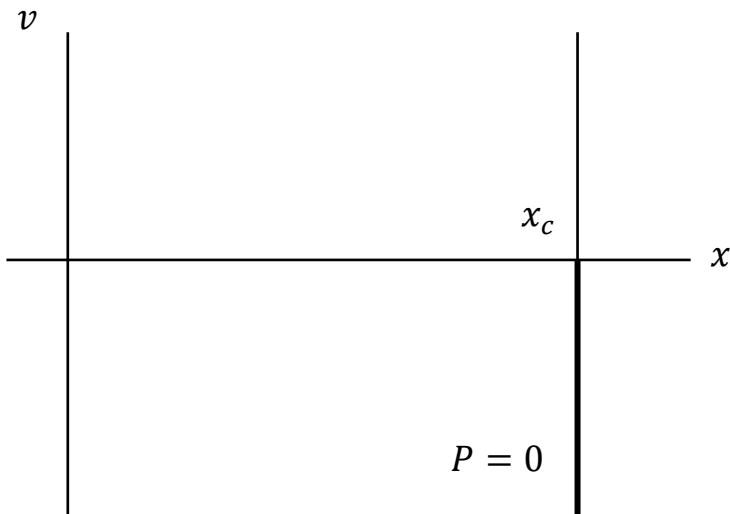


Рис. 3. Рівняння з граничною умовою $P(x_c, v, t) = 0$ при $v < 0$

Кольоровий шум. Почнемо з рівняння Крамерса (5) і розглянемо просторово однорідний випадок $U' = 0$. Тоді можна здійснити інтегрування за x і отримати рівняння для розподілу $P(v, t)$ окремо для v :

$$\frac{\partial P(v, t)}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial v} v P + \gamma T \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \quad (8)$$

Марковський процес $v(t)$, описаний цим основним рівнянням, є процесом Орнштейна-Уленбека. Математично еквівалентним способом опису цього процесу є рівняння Ланжевена:

$$\dot{v} = -\gamma v + \xi(t), \quad (9)$$

де $\xi(t)$ — стохастична функція, яка називається гаусовим білим шумом, чії стохастичні властивості визначаються:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = C \delta(t - t') \quad (10)$$

В результаті розв'язок $v(t)$ (з заданим початковим значенням $v(t_1) = v_1$) також є марковською та стохастичною функцією, її головне рівняння — (8), якщо взяти $C = 2\gamma T$. Рівняння Ланжевена (9) та (10) є популярними. Численні автори узагальнили рівняння (9),

взявши $x(t)$ не білий або кольоровий шум, тобто не дельта-корельований [10]:

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \phi(t - t') \quad (11)$$

з деякою рівномірною функцією ϕ .

Постулат 7. Коли шум у L-рівнянні не білий, змінна $v(t)$ не є марковською. Отже, для рівняння Ланжевена з кольоровим шумом неможливо сформулювати значущу початкову умову чи час першого проходження.

Іншим узагальненням рівняння Ланжевена (9) є нелінійний варіант [11]:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi(t) \quad (12)$$

Коли $\xi(t)$ білий, то $x(t)$ є марковським. На жаль, рівняння в його нинішньому вигляді не має чітко визначеного значення і має забезпечуватися «правилом інтерпретації», або Іто, або Стратоновича. Щоб уникнути примх обчислення Іто, ми вибираємо останнє. Це відповідає А-рівнянню:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} f(x)P + \frac{C}{2} \frac{\partial}{\partial x} g(x) \frac{\partial}{\partial x} g(x)P$$

Коли $\xi(t)$ забарвлений, то $\xi(t)$ не є марковським, і рівняння не існує. Спроби побудови аналогічних диференціальних рівнянь у частинних похідних приречені на провал. Рівняння (12) належить до загального класу стохастичних диференціальних рівнянь. Їх можна обробити за допомогою методів апроксимації, розроблених для випадку, коли $\xi(t)$ є брудно-білим, тобто короткою кореляцією та різким піком $\phi(t - t')$ [12].

Інший метод, застосовний, коли цей час невеликий, використовувався Кубо [13] і був багаторазово модифікований [14]. Припустимо, що $x(t)$ сам по собі є марковським процесом, який описується А-рівнянням. Тоді спільна змінна (ξ, x) є марковською з А-рівнянням:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x, \xi, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x} \{f(x) + \xi g(x)\}P \\ & + \gamma \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \xi P + T \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

На практиці це мало допоможе, якщо для $\xi(t)$ не вибрати ще простіший не білий процес, а саме «дихотомічний процес Маркова». Тобто ξ має два можливі значення $+1, -1$ і стрибає з постійною ймовірністю γ за одиницю часу, як описано М-рівнянням:

$$\begin{aligned}\dot{P}_+ &= -\gamma P_+ + \gamma P_- \\ \dot{P}_- &= \gamma P_+ - \gamma P_-\end{aligned}$$

При такому виборі рівняння (13) зводиться до:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} P_+(x, t) &= -\frac{\partial}{\partial x} (f + g) P_+ - \gamma P_+ + \gamma P_- \\ \frac{\partial}{\partial t} P_-(x, t) &= -\frac{\partial}{\partial x} (f - g) P_- + \gamma P_+ - \gamma P_-\end{aligned}$$

Клас немарковських процесів. У різних зв'язках відбувається процес наступного типу [17, 18]. Нехай X_t має два або більше можливих станів j , і в кожному він має ймовірність за одиницю часу γ_{ij} перейти до i . Якщо γ_{ij} є константами, $\{X_t\}$ є марковським процесом з М-рівнянням (3). Однак припустимо, що це функції $\gamma(\tau)$ часу τ , який минув з моменту прибуття в j . Приклади: Молекули в розчині можуть тимчасово прилипнути до стінки; бактерія дає потомство після досягнення певного віку. Інші приклади в [18, 1].

Ймовірність того, що X все ще перебуває в j у момент t після входу в нього, визначається як:

$$u_i(t) = \exp \left[- \int_0^t \sum_i \gamma_{ij}(\tau') d\tau' \right] \quad (14)$$

Починаючи з $t = 0$ у j_0 , він міг прийти в положення j у момент t через послідовність s переходів, у моменти $t_1, t_2, \dots, t_s$, переходячи через положення $j_1, j_2, \dots, j_s = j$. Ймовірність того, що ця конкретна подія відбудеться:

$$u_{j_0}(t_1) \gamma_{j_1 j_0}(t_1) u_{j_1}(t_2 - t_1) \gamma_{j_2 j_1}(t_2 - t_1) \dots \gamma_{j_s j_{s-1}}(t_s - t_{s-1}) u_{j_s}(t - t_s)$$

Ймовірність того, що $P_{j j_0}(t)$ перебуватиме в момент t у стані j , отримується шляхом підсумовування за всіма подіями, тобто: підсумовуванням за всіма s і всіма $j_s, \dots, j_{s-1}$ та інтегруванням за всіма проміжними моментами $t_1, \dots, t_s$.

Результат, записаний у перетвореннях Лапласа, такий:

$$\hat{P}_{jj_0}(\lambda) = \hat{u}_j(\lambda) \left[\frac{1}{1 - \hat{V}(\lambda)} \right]_{jj_0}, \quad (15)$$

де $\hat{u}_j(\lambda)$ — перетворення рівняння (14), а матриця $\hat{V}$:

$$\hat{V}_{ij}(\lambda) = \int_0^{\infty} \gamma_{ij}(\tau) u_i(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau$$

У деяких випадках результат (15) можна оцінити явно.

Модельна задача 3. Транспортування іонів крізь мембрану. Запропоновано наступну модель [19]. Мембрана розділяє два резервуари, іони можуть надходити з лівого або з правого резервуара. Швидкість, з якою вони надходять (тобто ймовірності в одиницю часу), визначаються двома зовнішніми рідинами з обмеженням: всередині мембрани не може бути більше одного іона. Потрапляючи всередину, іон може вийти через деякий час з будь-якої сторони. Таким чином, внутрішня частина мембрани являє собою систему, що має 5 станів:

- (0) порожній;
- (1) один іон, який увійшов ліворуч і має вийти праворуч;
- (2) один іон зліва, має вийти зліва;
- (3,4) два схожі стани з іонами справа.

Виходи відбуваються з ймовірностями γ_{oj} за одиницю часу ($j = 1, 2, 3, 4$), які залежать від часу t , що минув з моменту входу іона. Це немарківський процес типу (15). Рівняння може бути розв'язане і дає можливість обчислити такі фізично значущі величини, як середнє значення струму, що переноситься, і спектр флуктуацій [20].

Висновок. У статті автором надано результати власних та існуючих досліджень, пов'язаних з конструкцією і впровадженням немарковських процесів. Отримані результати постульовані з метою подальшого вивчення і застосування для вивчення, зокрема, кіберпростору. Є надія, що в роботах з іншими авторами будуть розвинуті отримані результати і розв'язані модельні проблеми, які виникли, зокрема в криптографії, теорії інформації і кодування.

Бібліографічні посилання

1. van Kampen N.G., Stochastic Processes in Physics and Chemistry (North-Holland, Amsterdam 1981, 1992).
2. Gardiner C.W., Handbook of Stochastic Methods (Springer, Berlin 1983).

3. Zernike F., in *Handbuch der Physik III* (Geiger and Scheel eds., Springer, Berlin 1926).
4. Doi M., Edwards S.F., *The Theory of Polymer Dynamics* (Oxford Univ. Press 1986).
5. Dzhalladova, I., Kaminsky, O., Lutyj, O. The impact of the consequences of the Covid-19 pandemic on the social security of Ukraine. *Access to science, business, innovation in digital economy*, Bulgarian, ACCESS Press, 2(3) pp. 252-260. [https://doi.org/10.46656/access.2021.2.3\(4\)](https://doi.org/10.46656/access.2021.2.3(4))
6. Feller W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications I* (2nd ed., Wiley, New York 1966) p. 323.
7. Kramers H.A., *Physica* 7, 284 (1940).
8. Schuss Z., Matkowski B., *SIAM J. Appl. Math.* 35, 604 (1970).
9. Hänggi P., Talkner P., Berkovich M., *Rev. Mod. Phys.* 62, 251 (1990).
10. Faetti E.g. S., Grigolini P., *Phys. Rev. A* 36, 441 (1987); M.J. Dykman, *Phys. Rev. A* 42, 2020 (1990).
11. Hänggi P. and Riseborough P., *Phys. Rev. A* 27, 3379 (1983); C. Van den Broeck and P. Hänggi, *Phys. Rev. A* 30, 2730 (1984). For an application to lasers see S. Zhu, A.W. Yu, and R. Roy, *Phys. Rev. A* 34, 4333 (1986).
12. van Kampen N.G., *Physica* 74, 215 and 239 (1974); *Physics Reports* 24, 171 (1976); *J. Stat. Phys.* 54, 1289 (1989); Terwiel R.H., *Physica* 74, 248 (1974).
13. R. Kubo, in *Stochastic Processes in Chemical Physics* (K.L. Shuler ed., Interscience, New York 1969).
14. E.g. Bray A.J., McKane A.J., *Phys. Rev. Letters* 62, 493 (1989); D.T. Gillespie, *Am. J. Phys.* 64, 1246 (1996).
15. Much literature is given in Fulinski A., *Phys. Rev. E* 50, 2668 (1994).
16. R.F. Pawula, J.M. Porrà, and J. Masoliver, *Phys. Rev. E* 47, 189 (1993); J.M. Pontà, J. Masoliver, and K. Lindenberg, *Phys. Rev. E* 48, 951 (1993).
17. G.H. Weiss, *J. Stat. Phys.* 8, 221 (1973); K.J. Lindenberg and R. Cukier, *J. Chem. Phys.* 67, 568 (1977).
18. N.G. van Kampen, *Physica A* 96, 435 (1979).
19. E. Barkai, R.S. Eisenberg, and Z. Schuss, *Phys. Rev. E* 54, 1 (1996).
20. N.G. van Kampen, *Physica A* 244, 414 (1997).
21. Dzhalladova I.A., Kaminsky O. E. Stabilizing steps the security of human and society in the covid-19 pandemic. *Economics Business and Organization Research*, (EBOR) Conference 2020, pp.295-308. Retrieved from <https://dergipark.org.tr/en/pub/ebor/issue/58610/848963>
22. Dzhalladova I.A., Ruzickova M., Michalkova M. Modeling of applied problems by stochastic systems and their analysis using the moment equations. *Adv. Difference Eq.* 2013, 2013:152. URL: <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-152>
23. Dzhalladova I.A. Moment Equations in Modeling a Stable Foreign Currency Exchange Market in Conditions of Uncertainty. *Abstract and Applied Analysis* vol. 2013, URL: <https://doi.org/10.1155/2013/172847>
24. Dzhalladova, Irada & Ruzickova, Miroslava. (2020). *Dynamical system with random structure and their applications*. Cambridge Scientific Publishers, ISBN: 978-1-908106-66-7
25. Dzhalladova I. A. Research stability of solutions of the systems linear with random coefficient. *Studies of the university of Zilina MATHEMATICAL SERIES Zilina, Slovak Republik., Vol. 23/2009. P. 37-43.*

26. Dzhalladova I.A., Ruzickova M., Michalkova M. Modeling of applied problems by stochastic systems and their analysis using the moment equations. Adv. Difference Eq. 2013, 2013:152. URL: <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-152>

27. Dzhalladova I.A. Moment Equations in Modeling a Stable Foreign Currency Exchange Market in Conditions of Uncertainty. Abstract and Applied Analysis vol. 2013, URL: <https://doi.org/10.1155/2013/172847>

28. Джалладова, І., Камінський, О. Вплив наслідків пандемії covid-19 на національну безпеку України. InterConf, вип. 41, лютий 2021 року. Retrieved from: <https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/interconf/article/view/8861>

29. Джалладова І. А. Системний аналіз загроз соціокібернетичної безпеки в умовах пандемії. *Моделювання та інформаційні системи в економіці*. 2020. Вип.100. С.50-58

30. Джалладова І. А., Бабинюк О. І., Лютий О. І. Модифікація методів дослідження системи різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами для аналізу загроз соціо-безпеки в умовах пандемії. *Моделювання та інформаційні системи в економіці*. 2020. Вип.99. С.55-69

Статтю подано до редакції 15.11.2021

УДК: 621.73.06

DOI 10.33111/mise.101.6

Дем'яненко В.В. к. е. н., доцент,
доцент кафедри комп'ютерної математики та інформаційної безпеки,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

Череда І.В. магістрант 1 курсу
за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз», ІТЕ,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

Demianenko V.V., Candidate of Economic Sciences,
Associate Professor of the department of Computer Mathematics and
Informational Security,
SHEI KNEU named after V. Hetman

Chereda I.V.
1th grade Master student for the educational and professional program
“System Analysis”, Institute of Information Technology in Economics,
SHEI KNEU named after V. Hetman

**АВТОМАТИЗАЦІЯ ЛОГІСТИЧНИХ БІЗНЕС-ПРОЦЕСІВ
ДИСПЕТЧЕРИЗАЦІЇ АВТОТРАНСПОРТУ
НА ПРОМИСЛОВИХ ПІДПРИЄМСТВАХ**

**AUTOMATIZATION OF LOGISTICAL
BUSINESS-PROCESSES OF TRANSPORT
DISPATCHERIZATION ON INDUSTRIAL ENTERPRIZES**