

*Д. Я. Хусаинов, Е. А. Юнькова*

**Оценка величины запаздывания в линейных  
дифференциальных системах  
с отклоняющимся аргументом**

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad (1)$$

где  $x \in R^n$ ,  $t \geq t_0$ ,  $\tau > 0$ ,  $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ ,  $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^n$  — постоянные матрицы. Система вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + Q(x(t), x(t - \tau)), \quad (2)$$

где функция  $Q(x(t), x(t - \tau))$  такова, что (2) допускает решение, называется системой, возмущенной по отношению к (1). Если запаздывание отсутствует, т. е.  $\tau = 0$ , то система (1) имеет вид

$$\dot{x}(t) = (A + B)x(t). \quad (3)$$

Исследование устойчивости решения  $x(t) \equiv 0$  системы (1) будем проводить методом функций Ляпунова.

Решение  $x(t) \equiv 0$  системы (1) называется асимптотически устойчивым, если для произвольного  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для любого другого решения  $x(t)$  системы (1) из неравенства  $\|x(t)\| < \delta(\varepsilon)$  при  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$  следует  $\|x(t)\| < \varepsilon$  при  $t > t_0$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ .

Решение  $x(t) \equiv 0$  системы (1) называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если для произвольного  $\varepsilon > 0$  существуют  $\delta(\varepsilon) > 0$  и  $\eta(\varepsilon) > 0$  такие, что для любого решения  $x_Q(t)$  возмущенной системы (2) из неравенств  $\|x_Q(t)\| < \delta(\varepsilon)$  при  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$  и  $\|Q\| < \eta(\varepsilon)$  следует  $\|x_Q(t)\| < \varepsilon$  при  $t > t_0$ .

Если запаздывание  $\tau$  достаточно мало, то из асимптотической устойчивости решения  $x_0(t) \equiv 0$  системы без запаздывания (3) следует асимптотическая устойчивость и устойчивость при постоянно действующих возмущениях решения  $x(t) \equiv 0$  системы с запаздыванием (1) [1, 2].

В настоящей работе вычисляется оценка запаздывания  $\tau$ , при которой справедливо приведенное выше утверждение. Если решение  $x_0(t) \equiv 0$  системы (3) асимптотически устойчиво, то для любой симметричной положительно определенной матрицы  $C$  существует единственная положительно определенная матрица  $H$ , являющаяся решением уравнения Ляпунова

$$(A^T + B^T)H + H(A + B) = -C. \quad (4)$$

Функция Ляпунова для системы (3) ищется в виде квадратичной формы  $v(x) = (x^T, Hx)$ . Величины запаздывания  $\tau_0$ , начального возмущения  $\delta(\varepsilon)$  и возможного возмущения  $\eta(\varepsilon)$  системы (2) вычисляются с использованием значений  $\lambda_{\min}(H)$ ,  $\lambda_{\min}(C)$ ,  $\lambda_{\max}(H)$ , являющихся наименьшими и наибольшими собственными числами матриц  $H$  и  $C$ .

**Теорема 1.** Если решение  $x_0(t) \equiv 0$  системы (3) асимптотически устойчиво, то при  $\tau < \tau_0$ , где  $\tau_0 = \lambda_{\min}(C) [2(\|A\| + \|B\|)\|HB\|]^{-1} \times (\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2}$ , решение  $x(t) \equiv 0$  системы (1) также асимптотически устойчиво.

Предварительно введем ряд определений. Поверхность уровня  $v(x) = \alpha$  будем обозначать  $\partial v^\alpha$ , а область, ограниченную поверхностью уровня, через  $v^\alpha$ , т. е.  $\partial v^\alpha = \{x: v(x) = \alpha\}$ ,  $v^\alpha = \{x: v(x) \leq \alpha\}$ .

**Лемма 1.** Пусть для  $t \geq t_0 + \tau$  существует  $\alpha > 0$  такое, что  $x(t) \in \partial v^\alpha$ , а при  $t - 2\tau \leq s \leq t$   $x(s) \in v^\alpha$ . Тогда для произвольного  $\gamma > 0$  существует  $\tau_0 > 0$  такое, что при  $\tau \leq \tau_0$  будет  $\|x(t) - x(t - \tau)\| < \gamma \|x(t)\|$ .

**Доказательство.** Пусть существует  $\alpha > 0$  такое, что  $x(t) \in \partial v^\alpha = \{x: v(x) = \alpha\}$ , а при  $t - 2\tau \leq s \leq t$   $x(s)$  лежит внутри области, ограниченной  $\partial v^\alpha$ , т. е.  $x(s) \in v^\alpha = \{x: v(x) \leq \alpha\}$ . Тогда, как следует из оценок функции Ляпунова для линейных систем [3],  $\sup_{t-2\tau \leq s \leq t} \|x(s)\| \leq (\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H))^{1/2} \|x(t)\|$ , где  $x(t) \in \partial v^\alpha$ ,  $\lambda_{\max}(H)$ ,  $\lambda_{\min}(H)$  — соответственно наибольшее и наименьшее собственные числа симметричной положительно определенной матрицы  $H$ .

Из интегрального представления решения уравнения (1) получим

$$\|x(t) - x(t - \tau)\| = \left\| \int [Ax(s) + Bx(s - \tau)] ds \right\| \leq \tau (\|A\| +$$

$$+ \|B\|) \sup_{t-2\tau \leq s \leq t} \{\|x(s)\|\} \leq \tau (\|A\| + \|B\|) (\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H))^{1/2} \|x(t)\|,$$

и при  $\tau \leq \tau_0$ , где  $\tau_0 = \gamma (\|A\| + \|B\|)^{-1} (\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2}$ , будет  $\|x(t) - x(t-\tau)\| \leq \gamma \|x(t)\|$ .

Доказательство теоремы. Для произвольных  $\alpha > 0$  и  $\tau > 0$  найдем  $\delta(\alpha, \tau)$  такое, что из  $\|x(t)\| < \delta(\alpha, \tau)$  при  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$  будет  $x(t) \in v^\alpha$  при  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0 + \tau$ . Из равенства

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t [Ax(s) + Bx(s-\tau)] ds$$

следует, что при  $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$

$$\|x(t)\| \leq \delta + \int_{t_0}^t [\|A\| \|x(s)\| + \|B\| \delta] ds.$$

Используя неравенство Беллмана, получаем  $\|x(t)\| \leq \delta (1 + \|B\| \tau) \times \exp(\|A\| \tau)$ . Если справедливо неравенство  $\delta (1 + \|B\| \tau) \exp(\|A\| \tau) \leq (\alpha/\lambda_{\max}(H))^{1/2}$ , то при  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0 + \tau$   $x(t) \in v^\alpha$ . Таким образом,  $\delta$  выбираем из соотношения  $\delta(\alpha, \tau) = \exp(-\|A\| \tau) (1 + \|B\| \tau)^{-1} (\alpha/\lambda_{\max} \times (H))^{1/2}$ .

Рассмотрим полную производную функции Ляпунова  $v(x) = (x^T, Hx)$ , используя (1),

$$\begin{aligned} \dot{v}[x(t)] = & -(x^T(t), Cx(t)) + ([x(t-\tau) - x(t)]^T B^T, Hx(t)) + \\ & + (x^T(t), HB[x(t-\tau) - x(t)]). \end{aligned}$$

Пусть  $x(t) \in \partial v^\alpha$  и  $x(s) \in v^\alpha$  при  $t - 2\tau \leq s \leq t$ . Тогда, учитывая леммы 1, 2, для полной производной  $v(x)$  в силу (1) можно записать  $\dot{v}[x(t)] \leq (-\lambda_{\min}(C) + 2\gamma \|HB\|) \|x(t)\|^2$ . И при  $\gamma < \lambda_{\min}(C)/(2\|HB\|)$ , где  $\lambda_{\min}(C)$  — наименьшее собственное число матрицы  $C$ ,  $\dot{v}[x(t)] < 0$ . Это означает, что вектор движения  $x(t)$  системы (1) направлен внутрь  $\partial v^\alpha$  и решение не покинет область  $v^\alpha$ . Причем неравенство  $\dot{v}[x(s)] < 0$  будет сохраняться и при  $s > t$ , т. е. решение  $x(t) \equiv 0$  асимптотически устойчиво.

Таким образом, для произвольного  $\varepsilon > 0$  выбираем  $\tau_0 = \lambda_{\min}(C) \times [2(\|A\| + \|B\|)\|HB\|]^{-1} (\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2}$ ,  $\delta(\varepsilon) = \exp(-\|A\| \tau_0) \times (1 + \|B\| \tau_0)^{-1} (\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2} \varepsilon$ .

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Если решение  $x_0(t) \equiv 0$  системы (3) асимптотически устойчиво, то при  $\tau < \tau_0$ , где  $\tau_0 = \lambda_{\min}(C) [2(\|A\| + \|B\|)\|HB\|]^{-1} \times (\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2}$ , решение  $x(t) \equiv 0$  системы (1) устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

При этом произвольное решение  $x_Q(t)$  системы (2) не выйдет из  $\varepsilon$ -окрестности начала координат при  $t > t_0$ , если  $\|x_Q(t)\| < \delta(\varepsilon)$  при  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$  и  $\|Q\| < \eta(\varepsilon)$ , где

$$\delta(\varepsilon) = (1 - \zeta) (1 + \|B\| \tau_0)^{-1} \exp(-\|A\| \tau_0) (\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2} \varepsilon,$$

$$\eta(\varepsilon) = \varepsilon (\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2} \min \{ \zeta \tau_0^{-1} \exp(-\|A\| \tau_0),$$

$$(\|A\| + \|B\|) (1 - \xi) \beta / \xi, \quad (1 - \xi) (1 - \beta) \lambda_{\min}(C) / (2\|H\|) \},$$

$\xi = \tau/\tau_0$ ,  $\zeta$  и  $\beta$  — произвольные числа,  $0 < \zeta < 1$ ,  $0 < \beta < 1$ .

Лемма 2. Пусть для  $t \geq t_0 + \tau$  существует  $\alpha > 0$  такое, что  $x_Q(t) \in \partial v^\alpha$ , а при  $t - 2\tau \leq s \leq t$   $x_Q(s) \in v^\alpha$ . Тогда для произвольного  $\gamma > 0$  будет существовать  $\tau_0 > 0$  и  $\eta > 0$  такие, что при  $\tau < \tau_0$  и  $\|Q\| < \eta$  будет  $\|x_Q(t) - x_Q(t-\tau)\| < \gamma \|x_Q(t)\|$ .

Доказательство. Проводя оценки решений  $x_Q(t)$  системы (2),

получим

$$\|x_Q(t) - x_Q(t - \tau)\| \leq \int_{t-\tau}^t \|Ax_Q(s) + Bx_Q(s - \tau) + Q(x_Q(s), x_Q(s - \tau))\| ds < \\ < \tau[(\|A\| + \|B\|) \sup_{t-2\tau \leq s \leq t} \{\|x_Q(s)\|\} + \eta] \leq \tau[(\|A\| + \|B\|) \times \\ \times (\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H))^{1/2} \|x_Q(t)\| + \eta].$$

Если положить  $\tau_0 = \gamma(\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2}/[\xi + (1 - \xi)\beta]$  ( $\|A\| + \|B\|$ ),  $\eta = (\|A\| + \|B\|)(1 - \xi)\beta/\xi(\alpha/\lambda_{\min}(H))^{1/2}$ , где  $\xi = \tau/\tau_0$ ,  $0 < \beta < 1$ , то лемма 2 выполняется.

Доказательство теоремы. Выберем  $\delta > 0$  и  $\eta > 0$  таким образом, чтобы  $x_Q(t) \in v^\alpha$  при  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0 + \tau$ , лишь только  $\|x_Q(t)\| < \delta$  при  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$  и  $\|Q\| < \eta$ . Получая оценки аналогично теореме 1, находим:

$$\|x_Q(t)\| \leq \|x_Q(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|Ax_Q(s) + Bx_Q(s - \tau) + Q(x_Q(s), x_Q(s - \tau))\| ds.$$

Используя неравенство Беллмана, запишем  $\|x_Q(t)\| \leq [\delta(1 + \|B\|\tau) + \eta\tau] \exp(\|A\|\tau)$ . Таким образом, выбираем

$$\delta = (1 - \xi)(1 + \|B\|\tau)^{-1} \exp(-\|A\|\tau)(\alpha\lambda_{\max}(H))^{1/2},$$

$$\eta = \xi\tau^{-1} \exp(-\|A\|\tau)(\alpha/\lambda_{\max}(H))^{1/2}, \quad 0 < \xi < 1.$$

Оценим полную производную  $v(x)$ , используя (2):

$$\dot{v}[x_Q(t)] = -(x_Q^T(t), Cx_Q(t)) + ([x_Q(t - \tau) - x_Q(t)]^T B^T, Hx_Q(t)) + \\ + (x_Q^T(t), HB[x_Q(t - \tau) - x_Q(t)]) + 2(x_Q^T(t)H, Q(x_Q(t), x_Q(t - \tau))) \leq \\ \leq (-\lambda_{\min}(C) + 2\gamma\|HB\|)\|x_Q(t)\|^2 + 2\|H\|\eta\|x_Q(t)\|.$$

Положим  $\gamma = \lambda_{\min}(C)(2\|HB\|)^{-1}[\xi + (1 - \xi)\beta]$ , тогда  $\tau_0 = \lambda_{\min}(C) \times [2(\|A\| + \|B\|)\|HB\|]^{-1}(\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2}$ . Выберем для произвольных  $\varepsilon > 0$  и  $\tau < \tau_0$  величины  $\delta(\varepsilon)$  и  $\eta(\varepsilon)$  следующим образом:

$$\delta(\varepsilon) = (1 - \xi)(1 + \|B\|\tau_0)^{-1} \exp(-\|A\|\tau_0)(\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2},$$

$$\eta(\varepsilon) = \varepsilon(\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H))^{1/2} \min\{\xi\tau_0^{-1} \exp(-\|A\|\tau_0),$$

$$(\|A\| + \|B\|)(1 - \xi)\beta/\xi, (1 - \xi)(1 - \beta)\lambda_{\min}(c)/(2\|H\|)\},$$

где  $\xi = \tau/\tau_0$ ,  $0 < \xi < 1$ ,  $0 < \beta < 1$ . Тогда решение  $x(t) \equiv 0$  будет устойчивым при постоянно действующих возмущениях. Действительно, для произвольных  $\varepsilon > 0$  и  $\tau < \tau_0$  в силу выбора  $\delta(\varepsilon) > 0$  и  $\eta(\varepsilon) > 0$  при  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0 + \tau$   $x_Q(t) \in v^\alpha$ , где  $\alpha = \lambda_{\min}(H)\varepsilon^2$ . Но тогда при  $t \geq t_0 + \tau$   $\|x_Q(t) - x_Q(t - \tau)\| < \gamma\|x_Q(t)\|$ , где  $\gamma = \lambda_{\min}(C)[\xi + (1 - \xi)\beta]/(2\|H\|)$ . И так как при этом полная производная  $v(x)$  в силу системы (2) отрицательно определена, то  $x(t) \equiv 0$  устойчиво при постоянно действующих возмущениях, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Величины  $\tau_0$ ,  $\delta(\varepsilon)$  и  $\eta(\varepsilon)$  — функции  $\lambda_{\min}(H)$ ,  $\lambda_{\min}(c)$ ,  $\lambda_{\max}(H)$ . За счет удачного выбора матрицы  $C$  эти величины можно улучшить.

1. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.—296 с.
2. Хусаинов Д. Я., Шарковский А. Н. Об устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. — В кн.: Функциональные и дифференциально-разностные уравнения. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974, с. 141—147.
3. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970.—240 с.

Киевский  
государственный университет

Поступила в редакцию  
12.12.81