

кції призводять до виникнення невизначеності в системі, що ускладнює прогнозування її подальшого розвитку та може впливати на стратегію розвитку малого підприємства, яке, функціонуючи в мовах підвищеного ризику, може зовсім відмовитись від здійснення інвестицій прибутку у виробничі фонди.

Література

1. Егорова Н. Е., Бельский В. З., Хачатрян С. Р. Моделирование динамики малых предприятий с учетом инвестиционного фактора / Препринт #WP/2003/157. — М.: ЦЭМИ РАН, 2003. — 58 с.
2. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzy ТЕСН. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 736 с.
3. Лю Б. Теория и практика неопределенного программирования. Бином. — Лаборатория знаний, 2005. — 416 с.
4. Піскунова О. В. Моделювання розвитку малого підприємства за різних форм державної фінансової підтримки // Фінанси України. — 2010. — № 8. — С. 115—124.
5. Податковий кодекс України: Закон: Верховна Рада України. Кодекс від 02.12.2010 № 2755-VI.
6. Про збір та облік єдиного внеску на загальнообов'язкове державне соціальне страхування: Закон України 08.07.2010 № 2464-VI.
7. Про стан та перспективи розвитку підприємництва в Україні. Національна доповідь. — К.: Держкомпідприємство // Економіст. — № 5. — 2009. — С. 18—63.
8. Хачатрян С.Р., Пинегина М.В., Буянов В.П. Методы и модели решения экономических задач: Учебное пособие. — М.: Экзамен. — 2005. — 384 с.

Статтю подано до редакції 21.03.12 р.

УДК 517.9: 330.42

О. І. Неня, канд. фіз.-мат. наук,
старш. викладач, кафедра вищої математики,
ДВНЗ «Київський національний економічний
університет імені Вадима Гетьмана»

ДОСЛІДЖЕННЯ ГЛОБАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ МОДЕЛІ ДІЛОВОГО ЦИКЛУ

АНОТАЦІЯ. У публікації розглядається нелінійна модель ділового циклу, яка описується різницеvim рівнянням Ріккера з запізненням. Досліджується проблема побудови області глобальної стійкості рівняння Ріккера та даної моделі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: динамічна система, різницеве рівняння з запізненням, глобальна стійкість, асимптотична поведінка.

АННОТАЦИЯ. В публикации рассматривается нелинейная модель делового цикла, которая описывается разностным уравнением Риккера с запаздыванием. Исследуется проблема построения области глобальной устойчивости уравнения Риккера.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: динамическая система, разностное уравнение с запаздыванием, глобальная устойчивость, асимптотическое поведение.

ANOTATION. In article considered non-linear model of the business cycle, which is described by the Ricker difference equation with delay. We study the problem of constructing the global stability of the equation Ricker.

KEYWORDS: dynamical system, delay difference equation, global stability, asymptotic behavior.

Постановка задачі. Розглянемо моделі ділового циклу, які описуються нелінійними рівняннями з коливними розв'язками і узагальнюють модель мультиплікатора Кейнса.

Основна гіпотеза макроекономічної моделі Кейнса «попит створює пропозицію» може бути представлена рівнянням

$$Y_{t+1}^S = Y_t^D, \quad (1)$$

тобто величина пропозиції — національного доходу — в кожен наступний момент часу має дорівнювати величині попиту попереднього періоду.

Але така трактовка даної гіпотези є занадто «жорсткою» і виявляє лише напрям зміни національного доходу. Більш загальною є модель гіпотези Кейнса, в якій приріст національного доходу не дорівнює надлишковому попиту, а має функціональну залежність від надлишкового попиту в усі попередні моменти часу, тобто

$$Y_{t+1}^S - Y_t^S = f\left(Y_t^D - Y_t^S, Y_{t-1}^D - Y_{t-1}^S, \dots, Y_{t-k}^D - Y_{t-k}^S\right). \quad (2)$$

При

$$f\left(Y_t^D - Y_t^S, Y_{t-1}^D - Y_{t-1}^S, \dots, Y_{t-k}^D - Y_{t-k}^S\right) = \alpha\left(Y_t^D - Y_t^S\right), \quad (3)$$

де $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ — параметр, що характеризує реакцію економіки на дисбаланс між попитом і пропозицією, маємо «м'яку» модель гіпотези Кейнса, і якщо $\alpha = 1$, то із (2) отримуємо «жорстку» модель (1).

Нехай поточне споживання лінійно пов'язане з пропозицією, тобто $C_t = C_0 + cY_t^S$, а інвестиції складаються із автономних (I_0) і постійного попиту на інвестиції $I_t = I_0 + \Delta I$. Тоді величина попиту запишеться наступним чином

$$Y_t^D = C_t + I_t = C_0 + cY_t^S + I_0 + \Delta I. \quad (4)$$

Підставляючи (4) в (2) при умові (3) отримуємо лінійне різницеве рівняння

$$Y_{t+1}^S = Y_t^S + \alpha \left[(c-1)Y_t^S + C_0 + \Delta I \right], \quad (5)$$

яке має єдину глобальну точку нерухомо $Y^* = \frac{\Delta I + I_0 + C_0}{1-c}$ при умові $\alpha < \frac{2}{1-c}$.

Представлення функції f у вигляді (3) призвело до лінійної моделі без запізнення, глобальна стійкість якої широко досліджена в літературі [1—3, 7].

Більш цікавим є випадок коли реакцію економіки на дисбаланс попиту та пропозиції можна представити нелінійним рівнянням виду

$$Y_{t+1}^S = Y_t^S \left(q + \exp \left[\alpha \left(Y_{t-k}^D - Y_{t-k}^S \right) \right] \right). \quad (6)$$

У цьому випадку національний дохід зростає, якщо надлишковий попит більше нуля, але, завдяки доданку $q \in [0;1)$, не завжди зменшується коли надлишковий попит менше нуля. Перехід до нелінійного рівняння (6) призводить до такої поведінки траєкторії моделі, коли з'являються біфуркації та хаос, навіть якщо функції попиту та пропозиції залишаються лінійними.

Дослідження глобальної стійкості точки рівноваги для випадку коли $k=0$ і $q=0$ у рівнянні (6) проведено в монографії [1]. Ми ж дослідимо складніший випадок, коли при $k>0$ і $q \in [0;1)$ виникає нелінійне різницеве рівняння з запізненням.

Представивши сукупний попит наступним чином $Y_t^D = Y^* + c(Y_t^S - Y^*)$ і підставивши його в (6) отримаємо рівняння:

$$Y_{t+1}^S = Y_t^S \left(q + \exp \left[\alpha(1-c) \left(Y^* - Y_{t-k}^S \right) \right] \right), \quad (7)$$

яке при $a = \alpha(1-c)$, $\gamma = \exp(aY^*)$ приводиться до рівняння:

$$Y_{t+1}^S = Y_t^S \left(q + \gamma \exp \left(-aY_{t-k}^S \right) \right). \quad (8)$$

Ввівши нову змінну $x_t = aY_t^S$ отримаємо рівняння

$$x_{t+1} = x_t (q + \gamma \exp(-x_{t-k})). \quad (9)$$

Рівняння (9) називається рівнянням Ріккера і виникає в математичній біології для опису циклічних коливань чисельності популяції.

Задача даної публікації полягає в дослідженні умов глобальної стійкості нерухомої точки моделі ділового циклу, яка описується саме рівнянням Ріккера.

Допоміжні результати.

Розглянемо нелінійне різницеве рівняння із запізненням

$$x_{n+1} = x_n + f_n(x_n, \dots, x_{n-k}), \quad (10)$$

де $n \in \mathbb{Z}$, $x_n \in \mathbb{R}$. Нелінійні функції $f_n: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняють умови **(H)**:

1) Припустимо, що функції f_n задовольняють наступну умову:

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(z_j, \dots, z_{j-k}) = \infty$$

для кожної послідовності $\{z_j\}$, яка має ненульову границю на нескінченності.

2) Існує число $a < 0$ таке, що $aM(\phi) \leq f(n, \phi) \leq -aM(-\phi)$ для всіх $\phi \in R^{k+1}$, де функціонал $M: R^{k+1} \rightarrow R_+$, $M(z) = \max_i \{0, z_i\}$, $z = (z_0, \dots, z_k)$.

Відмітимо, що різницеве рівняння з запізненням Рікера (див.[4]) можна звести до рівняння виду (10).

Означення 1. Розв'язком рівняння (10) з початковою умовою

$$x_i = \phi_i, i = -k, \dots, 0, \quad (11)$$

є послідовність $\{x_n\}$, яка означена для всіх $n \geq -k$, задовольняє початкову умову (11) і рівняння (10) при $n = 0, 1, \dots$.

Очевидно, що розв'язок $\{x_n\}$ існує для всіх $n \geq 0$ і може бути побудований послідовно.

Означення 2. Розв'язок $\{x_n\} = x^*$ різницевого рівняння

$$x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), n = 0, 1, \dots \quad (12)$$

називається нерухомим розв'язком (нерухомою точкою), якщо він задовольняє рівняння $G(x^*) = x^*$, де $G(x) = g(x, x, \dots, x), (x, x, \dots, x) \in R^{k+1}$.

Означення 3. Нерухомий розв'язок $\{x_n\} = x^*$ різницевого рівняння (12) називається стійким, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ і $n_0 > 0$ існує $\delta(\varepsilon, n_0) > 0$ таке, що якщо $\|x_{n_0} - x^*\| < \delta$, тоді $\|x_n - x^*\| < \varepsilon$ для всіх $n \geq n_0$.

Означення 4. Нерухомий розв'язок x^* рівняння (10) є глобальним атрактором, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ для кожної послідовності $\{x_n\}$, що задовольняє рівняння (10).

Означення 5. Нерухомий розв'язок x^* рівняння (10) називається локально асимптотично стійким, якщо він стійкий і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ для кожної послідовності $\{x_n\}$, що має початкові умови достатньо близькі до x^* .

Означення 6. Нерухомий розв'язок x^* рівняння (10) називається глобально стійким, якщо він стійкий і є глобальним атрктором.

Теорема 1. [5, 8] Припустимо, що функції f_n задовольняють умови **(Н)**. Тоді кожний розв'язок $\{x_n\}$ рівняння (10) прямує до 0, якщо

$$a \geq \max_{j=1,2} g(k, \tau_j) = \max_{j=1,2} \frac{-4}{k + \tau_j + 1 + \sqrt{(k + \tau_j + 1)^2 - 4\tau_j(\tau_j + 1)}}, \quad (13)$$

де τ_1 — ціла частина числа $\frac{1}{3} \left(k - 1 + \sqrt{k^2 + k + 1} \right)$, а $\tau_2 = \tau_1 + 1$.

Теорема 2. [6] Якщо виконуються умови **(Н)**, то для прямування до нуля кожного розв'язку рівняння (10) достатньо виконання наступної умови: $a \in (\bar{a}_k, 0)$, де $\bar{a}_k$ — це правий корінь квадратного рівняння

$$a^2 (s_k + 1)(s_k + 2) + 2a(s_k + k + 2) + 4 = 0$$

де $s_k = [(2k - 2)/3]$ ($[.]$ — ціла частина числа).

Основні результати.

Теорема 3. Умова $a \in (\bar{a}_k, 0)$ глобальної стійкості рівняння (10) еквівалентна умові (13) теореми 1.

Доведення. Покладемо $\Omega(s, k, 1, a) = a^2 s(s+1)/2 + (k+s+1)a + 1$. Легко перевірити, що нерівність $\Omega(s, k, 1, a) > -1$ еквівалентна нерівності $a > g(k, s)$, де $g(k, s)$ означена в (13).

Щоб перевірити, що умова $a \in (\bar{a}_k, 0)$ теореми 2 еквівалентна умові (13) теореми 1, досить показати, що $\max_{j=1,2} g(k, \tau_j) = g(k, s_k + 1)$. Для означених раніше чисел

$$s_k = \left[\frac{2}{3}(k-1) \right], \tau_1 = \tau_1(k) = \left[\frac{1}{3} \left(k - 1 + \sqrt{k^2 + k + 1} \right) \right], \tau_2 = \tau_2(k) = \tau_1 + 1.$$

Розглянемо три випадки.

1) Візьмемо всі числа $k = 3l + 1, l = 0, 1, \dots$, тоді $s_k = \left\lceil \frac{2}{3}(k - 1) \right\rceil = 2l$, а

$$\tau_1 = \left\lceil \frac{1}{3} \left(3l + \sqrt{9l^2 + 9l + 3} \right) \right\rceil = \left\lceil l + \sqrt{l^2 + l + \frac{1}{3}} \right\rceil = l + \left\lceil \sqrt{l^2 + l + \frac{1}{3}} \right\rceil = 2l.$$

Відповідно $\tau_2 = 2l + 1$ і $g(3l + 1, \tau_1) = g(3l + 1, \tau_2)$. Тому умова $a \in (\bar{a}_k, 0)$ еквівалентна нерівності $a > \max_j g(3l + 1, \tau_j) = g(3l + 1, s_k + 1)$.

2) Візьмемо числа $k = 3l + 2, l = 0, 1, \dots$, тоді $s_k = \lceil 2l + 2/3 \rceil = 2l$,

$$\tau_1 = l + \left\lceil \frac{1}{3} + \sqrt{l^2 + \frac{15}{9}l + \frac{7}{9}} \right\rceil = 2l + 1,$$

оскільки

$$l + 1 \leq \frac{1}{3} + \sqrt{l^2 + \frac{15}{9}l + \frac{7}{9}} < l + 2.$$

У цьому випадку $s_k + 1 = \tau_1(k) = 2l + 1$ і

$$g(k, \tau_1) = \frac{-4}{5l + 4 + \sqrt{9l^2 + 16l + 8}} > g(k, \tau_2) = \frac{-4}{5l + 5 + \sqrt{9l^2 + 10l + 1}}.$$

І тому умова $a \in (\bar{a}_k, 0)$ еквівалентна нерівності $a > \max_j g(3l + 2, \tau_j) = g(3l + 2, s_k + 1)$.

3) Візьмемо всі числа $k = 3l + 3$, тоді $s_k = \lceil 2l + 4/3 \rceil = 2l + 1$,

$$\tau_1 = l + \left\lceil \frac{2}{3} + \sqrt{l^2 + \frac{7}{3}l + \frac{13}{9}} \right\rceil = 2l + 1,$$

оскільки:

$$l + 1 \leq \frac{2}{3} + \sqrt{l^2 + \frac{7}{3}l + \frac{13}{9}} < l + 2.$$

У цьому випадку $s_k + 1 = \tau_2(k) = 2l + 2$ і

$$g(k, \tau_1) = \frac{-4}{5l+5+\sqrt{9l^2+26l+17}} < g(k, \tau_2) = \frac{-4}{5l+6+\sqrt{9l^2+20l+12}}.$$

Тому умова $a \in (\bar{a}_k, 0)$ еквівалентна нерівності

$$a > \max_j g(3l+3, \tau_j) = g(3l+3, s_k+1).$$

Теорему доведено.

Розглянемо рівняння Ріккера (9) коли $t = n$, тобто час є величина дискретна

$$x_{n+1} = x_n(q + \gamma \exp(-x_{n-k})), \quad n \in Z,$$

де $q \in [0;1)$, $\gamma > 1$.

Точка $x^* = \ln\left(\frac{\gamma}{1-q}\right) > 0$ є єдиною нерухомою точкою рівняння (9).

За допомогою теорем 1 і 3 отримаємо умову глобальної асимптотичної стійкості даного рівняння. Для цього підстановкою

$$y_n = -\ln\left(\frac{x_n}{x^*}\right) \text{ перетворимо рівняння (9) в рівняння виду (10):}$$

$$y_{n+1} = y_n + f(y_{n-k}), \quad (14)$$

$$\text{де } f(y) = -\ln\left(q + \gamma \exp\left(-x^* \exp(-y)\right)\right).$$

Теорема 4. Якщо функція f задовольняє умови (Н), то кожний розв'язок рівняння (14) прямує до 0 якщо

$$a_0 \geq \max_{j=1,2} \frac{-4}{k + \tau_j + 1 + \sqrt{(k + \tau_j + 1)^2 - 4\tau_j(\tau_j + 1)}}$$

де τ_1 — ціла частина числа $\frac{1}{3}\left(k - 1 + \sqrt{k^2 + k + 1}\right)$, $\tau_2 = \tau_1 + 1$, a_0 — розв'язок рівняння

$$\frac{\exp(a)}{a} = -\frac{qe}{\gamma}. \quad (15)$$

Доведення.

Знайдемо таке число $a < 0$ при якому функція $f(y)$ задовольняє умови **(Н)**. Введемо в розгляд функцію $g(y) = ay - f(y)$ та знайдемо таке значення a при якому рівняння $g(y) = 0$ має єдиний розв'язок в точці $y = 0$. Це має місце коли функція $g(y)$ не має точок екстремуму, а саме є спадною, тобто $g'(y) < 0$, що є справедливим при виконанні нерівності $-1 - \frac{t}{a} < \frac{q}{\gamma} \exp(t)$, де $t = x^* \exp(-y)$.

Позначимо $h(t) = \frac{q}{\gamma} \exp(t) + \frac{t}{a} + 1$ — відстань від функції експоненти $y = \frac{q}{\gamma} \exp(t)$ до прямої $y = -1 - \frac{t}{a}$, тоді дана відстань є мінімальною в точці $t = \ln\left(-\frac{\gamma}{qa}\right)$ і невід'ємною при виконанні нерівності $\frac{\exp(a)}{a} \geq -\frac{qe}{\gamma}$, звідки можна отримати граничне значення числа $a = a_0$ при якому виконуються умови **(Н)**.

Далі застосувавши теорему 1 отримаємо умову глобальної асимптотичної стійкості рівняння Ріккера (9).

Теорему доведено.

Нарешті отримаємо умову глобальної стійкості моделі ділового циклу рівняння Ріккера (9) при $k = 3$. Згідно умови, яку отримали в теоремі 4 та пункту 3 в доведенні теореми 3 умова глобальної стійкості має вигляд $a_0 \geq g(3l + 3, s_k + 1)$, де $l = 0$, $s_k = 1$. Число a_0 , як і раніше, є розв'язком рівняння (15), яке можна представити таким чином $a_0 = -W\left(\frac{\gamma}{qe}\right)$, де $W(x)$ — функція Ламберта, яка визначається як обернена до функції $y(w) = w \exp(w)$. Тобто маємо умову $W\left(\frac{\gamma}{qe}\right) \leq \frac{4}{6 + \sqrt{12}}$, яке перепишеться наступ-

ним чином $\gamma \leq qeW^{-1}\left(\frac{4}{6+\sqrt{12}}\right)$, звідки з означення функції Ламберта отримуємо умову глобальної стійкості рівняння (9)

$$1 < \gamma \leq q \frac{4}{6+\sqrt{12}} \exp\left(\frac{4}{6+\sqrt{12}} + 1\right). \quad (16)$$

Область глобальної стійкості знаходиться в верхньому правому куті наступного рисунка.

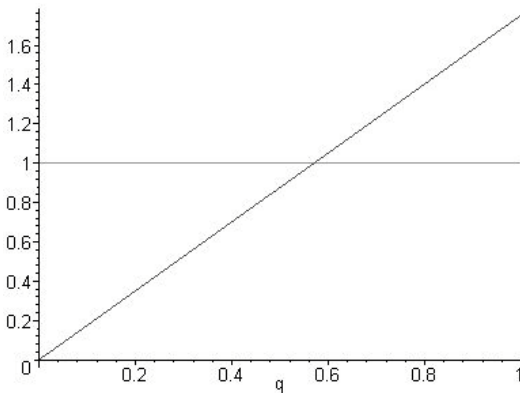


Рис. 1: Область глобальної стійкості рівняння Ріккера в координатах $(q; \gamma)$

Використовуючи позначення $\gamma = \exp\left(\alpha(1-c)Y^*\right)$ рівняння моделі

ділового циклу (7) для нерухомої точки $\bar{Y} = \frac{\Delta I + I_0 + C_0}{1-c} - \frac{\ln(1-q)}{\alpha(1-c)}$ з нерівності (16) отримуємо наступну умову глобальної стійкості

$$0 < \alpha(\Delta I + I_0 + C_0) \leq \ln q + \ln \frac{4}{6+\sqrt{12}} + \left(\frac{4}{6+\sqrt{12}} + 1\right).$$

Висновки. В статті розглянуто динамічну модель ділового циклу, побудовано різницеве рівняння з запізненням — рівняння Ріккера, яке описує дану модель. На основі отриманої умови глобальної стійкості побудовано область глобальної стійкості рівняння

Ріккера, що дозволяє передбачати поведінку динамічної моделі при всіх можливих параметрах, що описують дану модель.

Література

1. Дыхта В.А. Динамические системы в экономике. Введение в анализ одномерных моделей: Учебное пособие. — Иркутск: Изд-во БГУ-ЭП, 2003. — 178 с.
2. Васенкова Е.К., Волкова Е.С., Шандра И.Г. Математика для экономистов. Дифференциальные и разностные уравнения: Курс лекций. — М.: Финансовая академия, 2003. — 116 с.
3. Романко В.К. Разностные уравнения: Учебное пособие. — М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2006. — 112 с.
4. Liz E., Tkachenko V., Trofimchuk S. Global stability in discrete population models with delayed-density dependence // Mathem. Biosciences. — 2006. — 199. — P. 26—37.
5. Неня О.І. Про глобальну стійкість одного нелінійного різницевого рівняння // Нелінійні коливання. — 2006. — Т.9. — № 4. — С. 525—534.
6. Неня О.І., Ткаченко В.І., Трофимчук С.І. Про точні умови глобальної стійкості різницевого рівняння, яке задовольняє умову Йорка// Український математичний журнал. — 2008. — Т. 60. — №1. — С. 73—80.
7. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов: учеб. пособие. — М.: ФИЗМАТЛИТ. — 2004. — 464 с.
8. Неня О.І. Глобальна стійкість одного різницевого рівняння// Матеріали XI міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука, 18 — 20 трав., 2006 р. — К.: ТОВ «Задруга», 2006. — 206 с.

Статтю подано до редакції 30.03.12 р.

УДК 519.23/.25

Т. О. Зінкевич, канд. екон. наук,
доц. кафедри фінансів підприємств,
В. П. Лісовська, канд. фіз.-мат. наук,
заст. зав. кафедри вищої математики,
ДВНЗ «Київський національний економічний
університет імені Вадима Гетьмана»

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ ДО АНАЛІЗУ ЕКОНОМІЧНИХ ДАНИХ

АНОТАЦІЯ. У статті розглянуто і проаналізовано важливість застосування математичних і статистичних методів в економіці. По-