

ти часу, в які функція чутливості першого порядку більше і функція чутливості другого порядку менше (або де відношення цих величин порівняно). Виходячи з нашого аналізу за допомогою моделі популяції, ми пропонуємо використовувати функції чутливості першого та другого порядків як оптимальний інструмент конструювання оцінок.

Література

1. Banks H. T. and Bihavi K. L. Modeling and estimating uncertainty in parameter estimation. *Inverse Probl.* 17 (2001), 95—111.
2. Banks H. T., S. Derin and Ngujen H. K. Sensitivity of dynamical systems to parameters in a convex subset of a topological vector space, *Math. Biosci. End.* 4 (2007), 403—430.
3. Fedorov V. V. Theory of Optimal Experiments. *Academic Press*, New York, NY, 1978.
4. Berger M. P. F., Wong W. K. (Eds.) Applied Optimal Designs, John Wiley & Sons, Crichester, UK, 2005.
5. Thomaseth K. and C. Cobelli. Generalized sensitivity functions in physiological system identifications. *Ann. Biomed. Eng.* 27:5 (1999), 607—616.

Статтю подано до редакції 01.07.10 р.

УДК 519.7

Г. В. Шуклін, здобувач,
ДВНЗ «Київський національний економічний університет
імені Вадима Гетьмана»

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЩО ОПИСУЮТЬ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ ДИНАМІКИ ЦІН АКТИВІВ НА ФОНДОВОМУ РИНКУ

АНОТАЦІЯ. Стаття присвячена побудові розв'язків диференціальних рівнянь, що описують закони розподілу ймовірностей зростання і падіння цін активів на фондовому ринку.

ANNOTATION. The article is devoted to constructing solutions of differential equations which obtaining dynamic assets in stocks market.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. Запізнюючий експоненціал, ймовірність, диференціальне рівняння.

Вступ. У роботі [1] була запропонована модель зміни вартості активів деякого емітента на фондовому ринку у вигляді диференціальних рівнянь, що містять запізнення і описують імовірності розподілу зростання і падіння цін активів:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{\mu_- \lambda_+ \tau p_{\xi_-}(t - \tau) p_{\xi_-}(t) p_{\xi_+}(t) + \mu_+ \lambda_- \tau p_{\xi_+}(t - \tau) p_{\xi_+}(t) p_{\xi_-}(t)}{p_{\xi_+}(t) p_{\xi_-}(t)}, \quad (1)$$

$$\frac{dp_{\xi_0}(t)}{dt} = (\lambda_- + \lambda_+) p_{\xi_0}(t - \tau) - (\lambda_- + \lambda_+) p_{\xi_0}(t), \quad (2)$$

з початковими умовами $p(t) \equiv \varphi(t)$, $p_{\xi_0} \equiv v(t)$, $-\tau < t < 0$, де

$\frac{1}{\mu_-}, \frac{1}{\mu_+}$ — середній інтервал часу падіння, зростання ціни активу відповідно; λ_-, λ_+ — середня кількість падінь і зростань ціни активу відповідно за одиницю часу;

$p_{\xi_-}(t)$ — ймовірність того, що в момент часу t відбувається падіння ціни активу, тобто $\xi = -1$; $p_{\xi_+}(t)$ — ймовірність того, що в момент часу t відбувається зростання ціни активу, тобто $\xi = 1$; $p_{\xi_0}(t)$ — ймовірність того, що в момент часу t ціна активу не змінюється, тобто $\xi = 0$.

Враховуючи, що $p_{\xi_0}(t) = 1 - (p_{\xi_+}(t) + p_{\xi_-}(t))$, і (2), після відповідних перетворень, рівняння (1) прийме вигляд:

$$\frac{dp(t)}{dt} = -(\lambda_- + \lambda_+) p(t - \tau) + (\lambda_- + \lambda_+) p(t), \quad (3)$$

з початковими умовами $p(t) \equiv \varphi(t)$, $-\tau < t < 0$. Але для того, щоб побудувати розв'язки рівняння (3), які з економічної точки зору дають можливість зрозуміти динаміку ціни активу, необхідно побудувати початкову функцію $\varphi(t)$, яка дає динаміку активу в інтервалі часу, до заданого початкового моменту t .

У роботі [2] для наукової актуальності і практичної значимості вдосконалення індикаторів стану фондового ринку, було запропоновано виділяти тренд і періодичні коливання в динаміці цін на ринку акцій через аналітичні функції. Для виявлення довгострокової тенденції — це сплайн:

$$S_l(x) = P_l(x) + \sum_{i=1}^m c_i (x - u_i)_+^l. \quad (4)$$

Функція (4) неперервна функція разом зі своїми $(l-1)$ -ми похідними, у яких похідна порядку l постійна на інтервалах між заданими точками — «вузлами» (кількість їх m). Іншими словами, $S_l(x)$ представляє собою множину поліномів, які гладко «склеєні» в точках, які називають «вузлами» і кількість яких дорівнює m , а $P_l(x)$ — це поліном степені l , а для оцінки короткострокових рухів ринку — рівняння періодичних коливань, які будуються розкладанням комплексного циклічного часового ряду на кілька основних синусоїдальних функцій з відповідною довжиною хвиль у формі:

$$y_l = a_0 + \sum_{l=1}^q [a_k \cos(\varepsilon_k t) + b_k \sin(\varepsilon_k t)], \quad (5)$$

де $\varepsilon_k = \frac{2\pi k}{q}$ — кругова частота в радіанах за одиницю часу, a_k, b_k — коефіцієнти при різних частотах, які обчислені методом найменших квадратів з урахуванням того, що синуси і косинуси різних частот не корельовано один з одним. При цьому малися на увазі такі переваги згладжування цінової динаміки фондового ринку сплайн-функцією відносно традиційного ковзного середнього, як імовірно точне відображення ринкової тенденції і ліквідація відставання на половину періоду від цінового ряду. Разом з цим, наявність достатньо тісного зв'язку в (5) деяких синусів і косинусів з початковими даними, що дає можливість зробити висновок, що в них на відповідній частоті існує строга періодичність, яка визначається як:

$$P_k = \frac{(a_k^2 + b_k^2)N}{2}, \quad (6)$$

де P_k — значення періодограми на частоті ε_k , а N — довжина ряду. Урахування цієї періодичності дає можливість підвищити точність уявлень про цінову динаміку.

Саме підхід, який виражається (4), (5) і (6) і буде алгоритмом побудови початкової функції $p(t) \equiv \varphi(t)$, $-\tau < t < 0$.

У роботі [3] показано, що отримання інтегрального представлення розв'язку задачі Коші системи, що описується системою лінійних диференціальних рівнянь виду:

$$\dot{p}(t) = Bp(t - \tau) + f(t), \quad p(t) \in R^n, \quad t \geq 0, \quad \tau > 0, \quad \tau = \text{const}, \quad (7)$$

де $p(t) \equiv \varphi(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$, може бути подано у вигляді:

$$p(t) = e_{\tau}^{Bt} \varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 e_{\tau}^{B(t-\tau-s)} \varphi'(s) ds + \int_0^t e_{\tau}^{B(t-\tau-s)} f(s) ds, \quad (8)$$

де e_{τ}^{Bt} — матрична функція, названа запізнюючим експоненціалом і яка має наступний вигляд:

$$e_{\tau}^{At} = \begin{cases} \theta, & -\infty < t < -\tau \\ I, & -\tau \leq t < 0 \\ I + A \frac{t}{1!} + A^2 \frac{(t-\tau)^2}{2!} + \dots + A^k \frac{[t-(k-1)\tau]^k}{k!}, & (k-1)\tau \leq t < k\tau \end{cases} \quad (9)$$

полінома степені k на проміжках $(k-1)\tau < t \leq k\tau$ і «склеєного» в вузлах $t = k\tau$, $k = 0, 1, 2, \dots$, де θ, I — нульова і одинична матриця відповідно.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь виду:

$$\dot{p}(t) = Ap(t) + Bp(t-\tau) + bu(t), \quad p(t) \in R^n, \quad t \geq 0, \quad \tau > 0, \quad \tau = \text{const}, \quad (10)$$

де $p(t) \equiv \varphi(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$, і для яких виконується умова перестановочності квадратних матриць: A, B

$$AB = BA. \quad (11)$$

Для системи (10) вдається отримати розв'язок задачі Коші в інтегральній формі при умові (11). При цьому використовується підстановка Ейлера $p(t) = e^{At}$ і розв'язок (8) системи (7).

2. Інтегральне подання однорідної системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталим запізненням

У загальному випадку рівняння (3) є складовою системи лінійних диференціальних рівнянь, яка описує структуру динаміки зміни активів фондового ринку в цілому. Це істотно, так як на фондовому ринку представлені емітенти, які економічно пов'язані між собою, так як вартість активу одного емітента залежить від вартості активу іншого. Наприклад, вартість продукції емітен-

та, що виробляє сільськогосподарську продукцію, залежить від вартості палива емітента, що його виробляє, або вартість облігації з фіксованою дохідністю, яку емітує країна, що розвивається, залежить від політичної стабільності цієї країни і наявності емітентів, які мають економічні зв'язки з цією країною і т. д. Тому для отримання розв'язку рівняння (3) отримаємо спочатку загальний розв'язок, коли замість рівняння ми маємо систему рівнянь.

Розглянемо систему (10), для якої виконується умова (11). Нехай початкові умови мають вигляд: $p(t) \equiv \varphi(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$. Покажемо, що розв'язок задачі Коші для системи (10) може бути отримано в інтегральному вигляді з використанням інтегрального представлення (8) для системи (7) і матричного експоненціала

$$e^{At} = I + A \frac{t}{1!} + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^n \frac{t^n}{n!} + \dots \quad (12)$$

Лема 1. Для матричного експоненціала e^{At} справедлива залежність:

$$e^{A(t-\tau)} = e^{At} e^{-A\tau}. \quad (13)$$

Доведення. Розкладемо e^{At} у ряд Тейлора в околі точки $t_0 = \tau$. Отримаємо:

$$e^{At} = e^{A\tau} + A e^{A\tau} \frac{t-\tau}{1!} + A^2 e^{A\tau} \frac{(t-\tau)^2}{2!} + \dots + A^n e^{A\tau} \frac{(t-\tau)^n}{n!} + \dots$$

Звідки випливає, що:

$$e^{At} = (I + A \frac{t-\tau}{1!} + A^2 \frac{(t-\tau)^2}{2!} + \dots + A^n \frac{(t-\tau)^n}{n!} + \dots) e^{A\tau} = e^{A(t-\tau)} e^{A\tau},$$

де I — одинична матриця. Оскільки [4, с. 112] $e^{-A\tau} = (e^{A\tau})^{-1}$, то, помноживши почленно останню рівність справа на $e^{-A\tau}$, отримаємо твердження леми 1.

Лема 2. Нехай матриці A і B перестановочні, тобто задовольняють умові (11). Тоді, справедливе співвідношення:

$$e^{At}B = Be^{At}, t \geq 0. \quad (14)$$

Доведення. Як випливає з означення матричного експоненціала і умови перестановочності (11), справедливо співвідношення:

$$e^{At}B = B + AB \frac{t}{1!} + A^2B \frac{t^2}{2!} + \dots + A^nB \frac{t^n}{n!} + \dots =$$

$$B + BA \frac{t}{1!} + BA^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + BA^n \frac{t^n}{n!} + \dots = Be^{At}.$$

Лема доведена.

Розглянемо однорідну систему

$$\dot{p}(t) = Ap(t) + Bp(t - \tau), \quad p(t) \in R^n, \quad t \geq 0, \quad \tau > 0, \quad \tau = \text{const}, \quad (15)$$

для якої виконуються початкові умови $p(t) \equiv \varphi(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$ і для матриць A, B виконується умова (11).

Теорема 1. *Розв'язок $p(t)$ системи (15), де $\varphi(t)$ — довільна неперервно-диференційована векторна функція, може бути представлений у вигляді:*

$$p(t) = e^{B_1 t} \tau e^{A(t+\tau)} \varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 e^{A(t-s)} e^{B_1(t-\tau-s)} \tau [\varphi'(s) - A\varphi(s)] ds, \quad (16)$$

де $B_1 = Be^{-A\tau}$.

Доведення. Розв'язок системи (15) будемо шукати у вигляді:

$$p(t) = e^{At} y(t). \quad (17)$$

Продиференціював обидві частини рівності (17) і підставивши результат у ліву частину рівняння (15), а в праву частину підставивши (17), отримаємо:

$$e^{At} \dot{y}(t) = Be^{At} e^{-At} y(t - \tau). \quad (18)$$

Так як $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$ [4, с. 112], то систему (15) можна переписати у вигляді:

$$\dot{y}(t) = e^{-At} B e^{At} e^{-A\tau} y(t - \tau). \quad (19)$$

Так як для матриць A, B виконується умова (11), то згідно лемі 1 і лемі 2 систему (19) можна переписати у вигляді:

$$\dot{y}(t) = B e^{-A\tau} y(t - \tau). \quad (20)$$

Так як $p(t) \equiv \varphi(t)$ при $-\tau \leq t \leq 0$, то $y(t) \equiv e^{-At} \varphi(t)$ при $-\tau \leq t \leq 0$. Тоді розв'язок (8) для системи (15) прийме вид:

$$y(t) = e^{B e^{-A\tau} t} \tau e^{A\tau} \varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 e^{B e^{-A\tau} (t-\tau-s)} \tau e^{-As} [\varphi'(s) - A\varphi(s)] ds.$$

Ввівши позначення $B_1 = B e^{-A\tau}$, і з урахуванням лемі 2, отримаємо:

$$y(t) = e^{B_1 t} \tau e^{A\tau} \varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 e^{B_1 (t-\tau-s)} \tau e^{-As} [\varphi'(s) - A\varphi(s)] ds. \quad (21)$$

Підставивши (21) в (17), отримаємо (16). Теорема доведена.

3. Інтегральне подання розв'язку задачі Коші лінійного диференціального рівняння що описує зміни вартості активу одного емітента. Якщо розглядати скалярне рівняння (3), що моделює зміни вартості активу деякого одного емітента на фондовому ринку, то система (15) переходить у скалярне рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{dp(t)}{dt} &= \lambda p(t) - \lambda p(t - \tau), \quad p(t) \in R^1, \quad t \geq 0, \quad \tau > 0, \\ \tau &= \text{const}, \quad \lambda_-, \lambda_+ \in R, \quad \lambda = \lambda_- + \lambda_+, \end{aligned} \quad (22)$$

а значить, умова (11) виконується завжди. Значить, розв'язок задачі Коші рівняння (22) з початковими умовами $p(t) \equiv \varphi(t)$, при $-\tau \leq t \leq 0$, завжди можна представити у вигляді:

$$p(t) = e^{b_1 t} \tau e^{\lambda(t+\tau)} \varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 e^{\lambda(t-s)} e^{b_1(t-\tau-s)} \tau [\varphi'(s) - \lambda \varphi(s)] ds, \quad (23)$$

де $b_1 = \lambda e^{-\lambda\tau}$.

Використовуючи рівняння (23), а також метод ковзного середнього і сплайна з осцилятором, статистичні дані РАТ ЕЕС (Росій-

The top chart displays the ruble exchange rate against the US dollar. The y-axis ranges from 7.40 to 12.26. The x-axis shows dates from February 25 to October 7, 2014. The solid line represents daily fluctuations, and the dashed line represents the trend. The rate starts around 8.48, dips to a low of approximately 7.94 in late February, and then rises steadily to a peak of about 12.26 in late October.

The bottom chart displays the ruble exchange rate against the euro. The y-axis ranges from 23.60 to 78.23. The x-axis shows dates from February 25 to October 7, 2014. The solid line represents daily fluctuations, and the dashed line represents the trend. The rate starts around 60.02, dips to a low of approximately 29.67 in late February, and then rises to a peak of about 78.23 in late October.

Висновок. У роботі побудовано розв'язки диференціальних рівнянь, що описують закони розподілу ймовірностей зростання і падіння цін активів на фондовому ринку

1. *Шуклін Г.В.* Моделювання інвестиційних рішень на фондовому ринку // Моделювання та інформаційні системи в економіці. — № 79. — К., 2009.

2. Завельский М. Г., Пекарский А. В. Методы повышения эффективности инвестиционных решений на фондовом рынке // Экономика и математические методы. — 2008. — Т. 44. — № 2. — С. 25—36.

3. Хусайнов Д. Я., Шуклин Г. В. Об относительной управляемости в системах с чистым запаздыванием // Прикладная механика. — 2005. — Т. 41. — № 2.

4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988.

5. Кравченко Ю. Я. Фондовый рынок: Учебное пособие. — К.: Дакор, КНТ. — 2008.

6. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения, введение в теорию и приложения. — М.: Мир, 2003.

215