

УДК 330.115

*К. А. Семашко*, аспірант, асистент кафедри економіко-математичного моделювання, ДВНЗ «Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»

## **МОДЕЛЮВАННЯ ТІНЬОВОЇ ТА ЛЕГАЛЬНОЇ ЕКОНОМІК БЕЗ ВЗАЄМОВПЛИВУ МІЖ НИМИ**

*АНОТАЦІЯ. Охарактеризовано явище тіньової економіки (ТЕ) та її вплив на легальну економіку (ЛЕ) суспільства. Описано нелінійні динамічні моделі взаємозв'язку ТЕ і ЛЕ за умови відсутності впливу однієї на іншу. Проаналізовано отримані результати якісного і кількісного аналізу.*

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** тіньова та легальна економіки, нелінійна математична модель, адаптація динамічної моделі.

**АННОТАЦИЯ.** Охарактеризованы явление теневой экономики (ТЭ) и ее влияние на легальную экономику (ЛЭ) общества. Описаны нелинейные динамические модели взаимосвязи ТЭ и ЛЭ при отсутствии влияния одной на другую. Проанализированы полученные результаты качественного и количественного анализа.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** теневая и легальная экономики, нелинейная математическая модель, адаптация динамической модели.

**ANNOTATION.** The characteristic phenomenon of the shadow economy and its impact on the legal economy community. We describe the nonlinear dynamic model of the relationship of shadow economy and legal economy in the absence of influence of one on another. Analyzed the results of qualitative and quantitative analysis.

**KEYWORDS:** shadow economy and legal economy, nonlinear mathematical model, adaptation of dynamic models.

**Вступ.** Актуальною проблемою економіки будь-якої держави є оцінювання та прогнозування обсягів тіньової економіки. Фактично, тіньова економіка стала однією із складових економічної системи, від якої потрібно позбутися, або хоча б зменшити її обсяги. На жаль, проведення необхідних заходів, направлених на зменшення масштабів тіньової економіки, є неефективним без достовірного оцінювання розмірів цього явища. Тому, щоб розв'язати поставлену проблему, необхідно розглянути всі можливі варіанти співіснування двох видів економік (легальної та тіньової) і максимально точно оцінити обсяг останньої.

**Постановка проблеми.** Описати механізм взаємодії тіньової та легальної економік без взаємовпливу між ними. Створити відповідні умови для математичного відтворення динаміки, щоб була можливість аналізу ЛЕ і ТЕ суспільства.

**Мета дослідження.** Побудувати адекватну нелінійну динамічну математичну модель, яка представлена системами звичайних диференціальних рівнянь, для дослідження поставленої проблеми. Для комп'ютерного моделювання здійснюється гнучке використання відповідних моделей, інструментарію їх якісного й кількісного вивчення, що у цілому складає адаптивне економікоматематичне моделювання динаміки подій.

**Аналіз публікацій даної тематики.** Відома література, яка розглядає проблему тіньової економіки, наприклад джерела [1, 2], характеризується як ідеографічна. Їй притаманний описовий характер, який слід розцінювати як хорошу основу для формалізації досліджуваної проблеми, а потім створення адекватних ММ ди-

наміки подій, щоб отримати сценарії співіснування ЛЕ і ТЕ, за рахунок якісного і кількісного моделювання.

На сьогоднішній день у суспільстві будь-якого типу спостерігається два різновиди економік: легальна та тіньова. У загальному випадку взаємодія легальної економіки (ЛЕ) і тіньової економіки (ТЕ) являє собою динамічний процес, який можна описати системою нелінійних, диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 - b_{12} x_1 x_2 - c_1 x_1^2 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 - b_{21} x_1 x_2 - c_2 x_2^2 \end{cases} \quad (1)$$

де коефіцієнти  $c_1$  і  $c_2$  вказують на самообмеження обсягів відповідних економік, приймаючи до уваги ті або ті причини; скаляри  $a_1$  і  $a_2$  відповідають темпоральності описуваних подій. Ступінь взаємодії двох видів економіки відображається коефіцієнтами  $b_{ij}$  ( $i, j = 1, 2; i \neq j$ ) [3].

На підґрунті представленої математичної моделі (1) було розглянуто різні варіанти співіснування двох економічних гілок. Результати якісного та кількісного аналізу (інтегральні криві та фазові портрети) представлено та проаналізовано у роботах [4, 5] та інших.

Розглянемо ситуацію, коли одна з економік відчуває присутність іншої (наприклад, ЛЕ щодо ТЕ), а інша — ні (ТЕ не відчуває ЛЕ). Для спрощення якісного аналізу моделі (1) покладається: а)  $a_1 = a_2 = 1; b_{12} = 0, b_{21} = 1$ ; б)  $a_1 = a_2 = 1; b_{12} = 1, b_{21} = 0$ . Відповідно матимемо дві різні математичні моделі:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - c_1 x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_1 x_2 - c_2 x_2^2 \end{cases} \quad (1a)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_1 x_2 - c_1 x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_2 - c_2 x_2^2 \end{cases} \quad (1б)$$

Згідно адаптивного моделювання економічної динаміки [6] спершу шукаються особливі (рівноважні, стаціонарні або особливі) точки, прирівнюючи похідні змінних до нуля. Координати таких — розв'язки нелінійних систем рівнянь, а саме:

$$\begin{cases} x_1(1 - c_1 x_1) = 0 \\ x_2(1 - x_1 - c_2 x_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - c_1 x_1^2 = 0 \\ x_2 - x_2 x_1 - c_2 x_2^2 = 0 \end{cases} \quad (1a)$$

$$\begin{cases} x_1(1-x_2-c_1x_1)=0 \\ x_2(1-c_2x_2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_1x_2-c_1x_1^2=0 \\ x_2-c_2x_2^2=0 \end{cases} \quad (16)$$

Окрім тривіальної  $O_0(0;0)$  кожна з моделей володіє такими особливими точками:  $O_1(\frac{1}{c_1}; \frac{1-\frac{1}{c_1}}{c_2})$ ;  $O_2(0; \frac{1}{c_2})$ ;  $O_3(\frac{1}{c_1}; 0)$ , а для (1а);  $O_4(\frac{1-\frac{1}{c_2}}{c_1}; \frac{1}{c_2})$ ;  $O_5(\frac{1}{c_1}; 0)$ ;  $O_6(0; \frac{1}{c_2})$  для (1б), що перевіряються безпосередньо.

Щоб дослідити типи рівноважних станів, записується функціональна матриця Якобі

$$\mathfrak{J}_{1a} = \begin{pmatrix} 1-2c_1x_1 & 0 \\ -x_2 & 1-x_1-2c_2x_2 \end{pmatrix}, \text{ для ММ} \quad (1a),$$

$$\text{та } \mathfrak{J}_{1a} = \begin{pmatrix} 1-x_2-2c_1x_1 & -x_1 \\ 0 & 1-2c_2x_2 \end{pmatrix}, \text{ для ММ} \quad (16)$$

Для визначення типу особливих точок записується слід  $Sp\mathfrak{J}$  і  $\det \mathfrak{J}$  матриці Якобі:

$$Sp\mathfrak{J}_{1a} = 1-2c_1x_1 + 1-x_1-2c_2x_2 \Leftrightarrow Sp\mathfrak{J}_{1a} = 2-2c_1x_1-2c_2x_2-x_1;$$

$$\det \mathfrak{J}_{1a} = (1-2c_1x_1) * (1-x_1-2c_2x_2); \text{ і}$$

$$Sp\mathfrak{J}_{1b} = 1-x_2-2c_1x_1 + 1-2c_2x_2 \Leftrightarrow Sp\mathfrak{J}_{1a} = 2-2c_1x_1-2c_2x_2-x_2;$$

$\det \mathfrak{J}_{1b} = (1-2c_2x_2) * (1-x_2-2c_1x_1)$ , які обчислюються для кожної особливої точки, а потім користуються діаграмою [6, ст. 81]. тому чи іншому типові рівноважної точки ММ економічної системи відповідає своя поведінка інтегральної кривої — характер змінюваності обсягів ТЕ або ЛЕ з плином часу, тобто сценарії розвитку подій.

Деякі результати комп'ютерного моделювання на підґрунті зазначених вище нелінійних динамічних моделей представлено на рис. 1—11.

Для ММ(1а) у випадку  $c_1 = c_2 = 0,5$  на рис.1а спостерігається стрімке зростання обсягу виробництва (від 1 до 2) і подальша його стабілізація, та падіння обсягу ТЕ (від 0,4 до 0). Фазовий порт-

рет (рис. 1б) описує взаємозалежність ТЕ і ЛЕ. Залишаючи коефіцієнт  $c_1 = 0,5$  сталим, а  $c_2$  змінюючи від 0,007 до 1,5 ситуація майже не змінюється. ЛЕ продовжує домінувати над ТЕ.

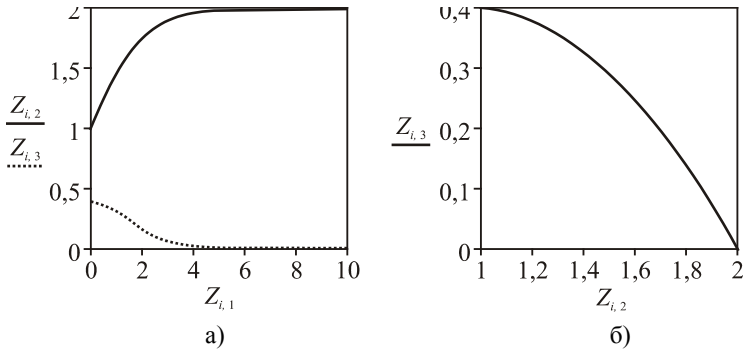


Рис. 1

а) інтегральні криві; б) фазовий портрет (неперервна — обсяг ЛЕ; пунктирна лінія — обсяг ТЕ)

Проаналізуємо ситуацію, коли коефіцієнт  $c_2 = 0,5$  — сталий, а  $c_1$  змінюються.

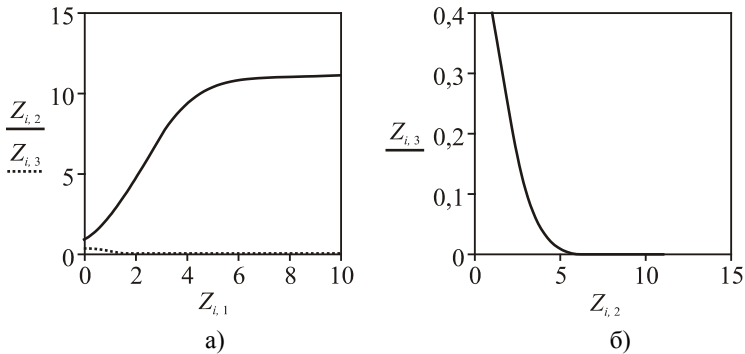


Рис. 2

а) інтегральні криві б) фазовий портрет

На рис. 2 показано співвідношення двох видів економік коли  $c_2 = 0,5$  а  $c_1 = 0,09$ . ЛЕ зростає на проміжку від 1 до 10, а потім стабілізується, а ТЕ падає до 0 і більше не існує.

Змінюючи коефіцієнт  $c_1$  від 0,3 до 0,9 — ЛЕ продовжує домінувати, а ТЕ — знаходиться на надзвичайно низькому рівні. (рис. 3).

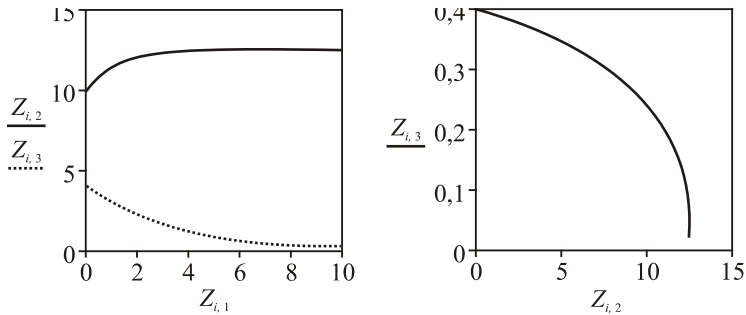


Рис. 3

а) інтегральні криві

б) фазовий портрет

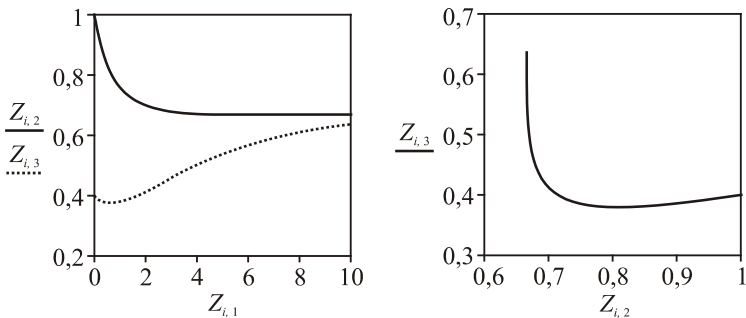


Рис. 4

а) інтегральні криві

б) фазовий портрет

На рис. 4 зображено ситуацію коли  $c_1 > 1$ . ЛЕ падає на проміжку від 1 до 0,8, хоча потім стабілізується, ТЕ — починає зростати і наближається до ЛЕ.

Змінюючи обидва коефіцієнти одночасно можливі такі варіанти розвитку подій: 1)  $c_1 > 1$  а  $c_2 = 0,05$  ЛЕ трохи падає від початкового рівня і стабілізується, а ТЕ — стрімко зростає (рис. 5); 2)  $c_1 > 1$ ,  $c_2$  від 0,5 до 2 — ТЕ і ЛЕ падають від початкового рівня але швидко стабілізуються (рис. 6)

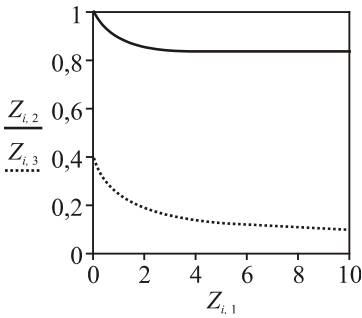


Рис. 5

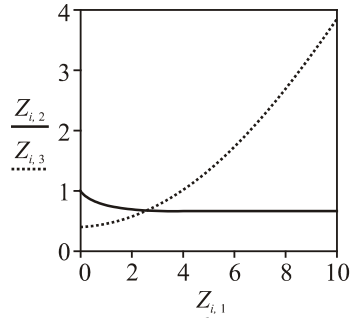


Рис. 6

Для ММ (16) за умови  $c_1 = c_2 = 0,5$  на рис. 7 видно, що обсяг ЛЕ падає до 0, а ТЕ на проміжку [1—5] зростає від 0,4 до 20, а потім стабілізується. Залишаючи коефіцієнт  $c_1 = 0,5$  сталим, а  $c_2 = 1,5$  ЛЕ падає, а ТЕ зростає і вони стабілізуються майже на одному рівні (рис. 8). Якщо  $c_1$  поступово зменшувати, то спостерігається домінування ТЕ над ЛЕ.

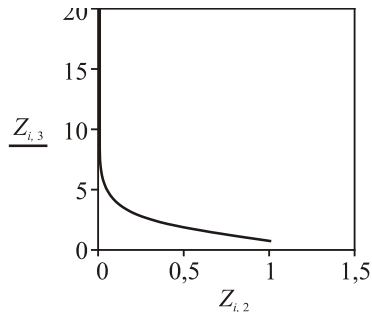
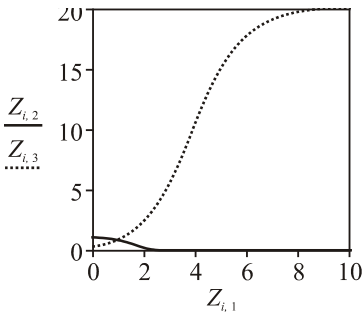
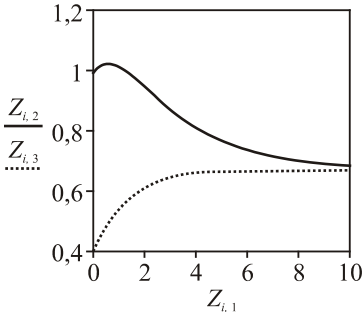


Рис. 7

а) інтегральні криві



б) фазовий портрет

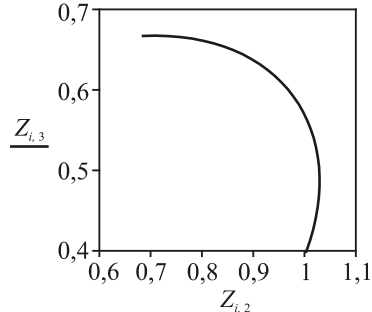


Рис. 8: а) інтегральні криві

б) фазовий портрет

На рис. 9 коефіцієнт  $c_2 = 0,5$  — сталий, а  $c_1$  змінюється від 0,03 до 2 — в усіх зазначених випадках ТЕ домінує над ЛЕ, причому, ЛЕ падає до 0, а ТЕ виростає до 2.

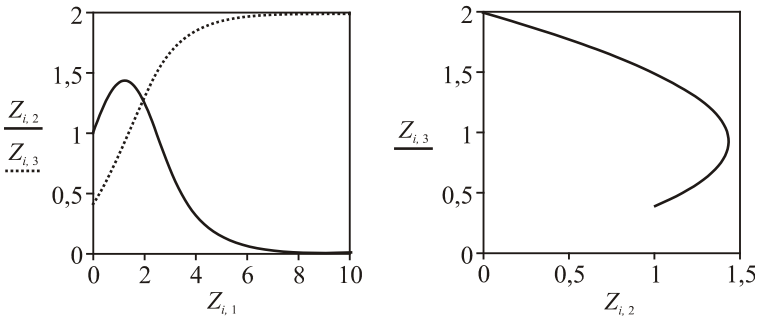


Рис 9: а) інтегральні криві б) фазовий портрет

Змінюючи обидва коефіцієнти одночасно можливі такі варіанти розвитку подій: а) ТЕ домінує над ЛЕ  $c_1 = 0,025$ ,  $c_2 = 0,075$  (рис. 10); б)  $c_1 = 0,009$ ,  $c_2 = 1$  — ТЕ і ЛЕ зростають порівняно з початковими умовами, а потім обидві економіки стабілізуються. ЛЕ знаходиться над ТЕ (рис. 11).

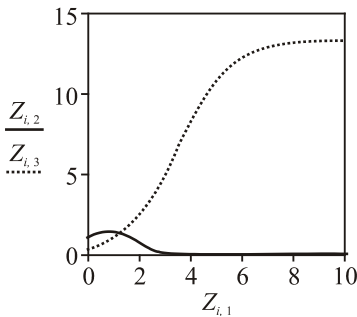


Рис. 10

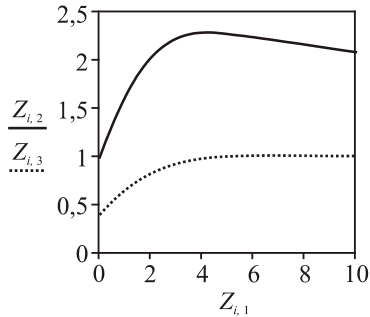


Рис. 11

Також під час проведення числового експерименту було досліджено вплив початкових умов на зміну обсягів легальної та тіншової економік. Кардинальних змін у поведінці ЛЕ та ТЕ не виявлено.

**Висновки.** Математична модель (1) потребує подальшого удосконалення динаміки нелінійної взаємозалежної поведінки легальної і тіншової економік. Також необхідно розглянути інші можливі випадки взаємодії двох видів економік.



Таким кроком у моделюванні та аналізі явища тіньової економіки може бути побудова математичної моделі з урахуванням лагів (запізнення).

### ***Література***

1. Тіньова економіка: сутність, особливості та шляхи легалізації: монографія / [З. С. Варналій, А. Я. Жаліло та ін.]; за ред. д.е.н., проф. З. С. Варналія. — К.: НІСД, 2006. — 576 с.

2. *Ермаков К. М.* Теневая экономика: анализ и моделирование. — М.: Финансы и статистика, 2004. — 498 с.

3. *Коляда Ю. В., Семашко К. А.* Сценарії співіснування легальної й тіньової економік суспільства на підґрунті математичного моделювання // Інформаційні технології та моделювання в економіці — третя міжнародна науково-практична конференція. — Черкаси: Брама-Україна, 2012 — С. 121—123.

4. *Коляда Ю. В., Семашко К. А.* Адаптивне якісне і кількісне моделювання обсягів тіньової економіки суспільства // Економічний аналіз : зб. наук. праць / Тернопільський національний економічний університет; редкол.: С. І. Шкарабан (голов. ред.) та ін. — Тернопіль : Видавничо-поліграфічний центр Тернопільського національного економічного університету «Економічна думка», 2012. — Вип. 11. — Частина 3. — 396 с. — С. 268—274.

5. *Коляда Ю. В., Семашко К. А.* Моделювання коеволюції легальної і тіньової економіки // Матеріали XVII Всеукраїнської науково-методичної конференції «Проблеми економічної кібернетики 2012» (Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса, 26—28 вересня 2012). В трьох томах. Том 2. — Одеса, ОНПУ, КНЦ «Політех-консалт» 2012 — С. 6—7.

6. *Коляда Ю. В.* Адаптивна парадигма моделювання економічної динаміки: монографія. — К: КНЕУ, 2011. — 297 с.

Стаття надійшла до редакції 30.05.2013 р.