

Ю. В. Коляда, докторант,
ДВНЗ «Київський національний економічний університет
імені Вадима Гетьмана»

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОБМІНУ ТОВАРАМИ ДЛЯ ПРОЦЕСУ НАСИЧЕННЯ

АНОТАЦІЯ. На прикладі гіпотетичного суспільства з виробництвом двох різних товарів, для яких має місце обмін, розглянуто ситуацію стану насиченості обмінного процесу. Отримана математична модель виступає як результат подальшого розвинення відомого в літературі підходу. При цьому на відміну від нього наводяться всі потрібні пояснення та детальні викладки. Надано економічне тлумачення результатам якісного моделювання.

ANNOTATION. On the example of hypothetical society with the production of two different commodities which an exchange takes place for, the situation of the state of saturation of exchange process is considered. Got a mathematical model comes forward as a result of subsequent development of the approach known in literature. Thus unlike him all necessary explanations and detailed expositions are pointed. Economic interpretation the results of high-quality design is given.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: обмін товарами, математична модель, процес насичення, якісне моделювання, економічне тлумачення.

Вступ. Математичне моделювання економіки, включаючи в себе математичні моделі (ММ), інструментарій їх якісного і кількісного дослідження та інформаційні технології — комп'ютерну реалізацію зазначеного вище, в останні роки [1, 2] все більше завоює прихильність дослідників, про що свідчить все зростаюча кількість журнальних публікацій та інших періодичних видань. Має місце пряме перенесення методології математичного моделювання з інших предметних областей, перш за все галузей техніки. Варто зауважити, що пряме використання здобутків автоматизації проектування [3] (так званих САПР — систем автоматизації проектних робіт) вимагає певних пояснень та деталізації, маючи на увазі рівень і обсяг математичної підготовки економіста, який донедавна вважався гуманітарієм.

Глобально в математичному моделюванні виділяються дві взаємопов'язані частини: 1) алгоритмізація економічної проблеми і побудова адекватної ММ; 2) дослідження отриманої ММ засобами математичної теорії та використання інформаційних тех-

нологій. Згадуванні частини являють собою дві сторони — лицьову і тильну однієї медалі-нагороди, якою є математичне моделювання економіки.

Зважаючи на існування значного числа математичних пакетів (Mathcad, Matlab тощо) кількісного аналізу ММ, найбільш нагально постає зараз питання побудови адекватної ММ об'єкту моделювання. Бажано це робити в автоматичному режимі на комп'ютері, як це має місце в електроніці, наприклад [3].

Системному вивченню адекватної ММ, її повному і всесторонньому кількісному дослідженню повинно передувати створення якісної ММ, за допомогою котрої розглядається екстремальні ситуації, граничні режими поведінки об'єкта моделювання.

Ретроспектива вивчення питання. По суті, в монографії [1] декларується кілька ММ різноманітних економічних явищ і процесів. Цими ж ММ описуються [4] об'єкти іншої природи, що свідчить про широке коло можливого впровадження. Стосовно оголошених ММ застосовуються елементи якісного аналізу звичайних диференціальних рівнянь [5] без тлумачення використовуваних понять і означень, за відсутності належних пояснень. Між іншим, це характерна риса монографій [1, 4], що не відповідає потребам і запитам сучасної теоретичної і прикладної економіки.

Раніше задекларована ММ обміну між двома товарами [1, розд. 1, с. 22—26] чи ціни товарів або їх собівартість [1, розд. 8, с. 210—214] нижче стисло викладається зо всіма необхідними поясненнями та деталізацією алгебраїчних перетворень на окремих етапах якісного дослідження.

Рівняння ММ записується

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = j_1 - j_2xy - j_3x \\ \frac{dy}{dt} = j_4 - j_5xy - j_6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x, y) \\ \dot{y}(t) = f_2(x, y) \end{cases}, \quad (1)$$

де функції $x(t)$ і $y(t)$ описують у деякий момент часу кількість товарів, що обмінюються; коефіцієнти j_1 і j_4 відповідають обсягу продукції виду x і y за одиницю часу; доданки j_2xy і j_5xy відображають процес обміну, а їх відношення $c = j_2/j_5$ є так звана обмінна вартість: на одиницю товару y міняється числом j_2 одиниць товару x і навпаки стосовно коефіцієнта j_5 ; члени j_3x і j_6y засвідчують ступінь фізичного і морального старіння товарів, причому вели-

чини $\tau_x = 1/j_3$ і $\tau_y = 1/j_6$ вказують на їх довговічність (термін вживання або придатності).

Поетапно якісне вивчення ММ проявляється у наступному. Спершу шукаються точки рівноваги, прирівнюючи нулю похідні $\dot{x}(t)$ і $\dot{y}(t)$. Стаціонарні (рівноважні) точки у нашому випадку записуються:

$$\bar{x} = \frac{j_1}{j_2\bar{y} + j_3}; \quad \bar{y} = \frac{j_4}{j_5\bar{x} + j_6}.$$

Підстановкою в формулу ординати $\bar{y}$ виразу абсциси $\bar{x}$ отримується квадратне рівняння

$$j_6j_2\bar{y}^2 + (j_5j_1 + j_6j_3 - j_4j_2)\bar{y} - j_4j_3 = 0,$$

два корені якого записуються

$$\bar{y}_{1,2} = \frac{[(j_2j_4 - j_3j_6 - j_5j_1) \pm \sqrt{(j_2j_4 - j_3j_6 - j_5j_1)^2 + 4j_2j_3j_4j_6}]}{2j_2j_6}.$$

Отже, мають місце дві рівноважні точки $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ і $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$, координати яких легко обчислюються.

Наступним кроком якісного аналізу є лінеаризація нелінійної системи (1), для чого записується її матриця Якобі

$$J(\cdot) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Потім знаходиться числове значення матриці Якобі $J(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ в особливих стаціонарних точках ($i = 1, 2$). Конкретно для нашого випадку маємо

$$J(\cdot) = \begin{pmatrix} -j_2\bar{y} - j_3 & -j_2\bar{x} \\ -j_5\bar{y} & -j_5\bar{x} - j_6 \end{pmatrix}.$$

Тип особливої точки визначається коренями

$$\lambda_{1,2} = \frac{SpM}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{SpM}{2}\right)^2 - \det M}$$

так званого характеристичного рівняння

$$\lambda^2 - SpM\lambda + \det M = 0,$$

де покладено $M = J(\cdot)$; $SpM = -j_2\bar{y} - j_3 - j_5\bar{x} - j_6$ називається слідом матриці, являючи собою суму елементів головної діагоналі; $\det M = j_2j_6\bar{y} + j_3j_5\bar{x} + j_3j_6$ є визначник матриці другого порядку. Коли корені дійсні, різні і протилежних знаків ($\det M < 0$), має місце особлива точка сідло-сімейство гіпербол (рис. 1). Коли корені комплексні, спряжені, але не уявні, тобто виконується нерівність

$\det M > \left(\frac{SpM}{2}\right)^2$, то можливі два варіанти: а) дійсна частина комплексно-спряженого кореня від'ємна ($SpM < 0$) — особлива точка є стійкий фокус (рис. 2а); б) $SpM > 0$ — нестійкий фокус (рис. 2б).

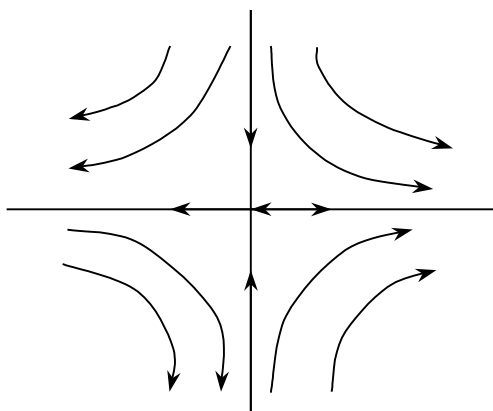


Рис. 1. Схематичне зображення особливої точки «сідло»

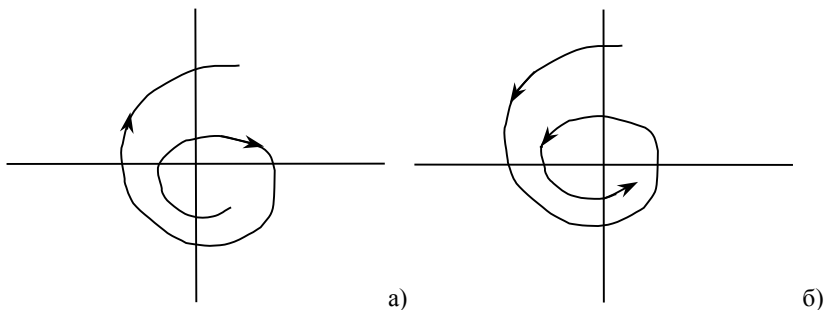


Рис. 2. Особлива точка фокус:

- а) стійкий — траєкторія накручується, стягуючись у точку;
 б) нестійкий — рух відбувається у зворотному напрямку (траєкторія розкручується)

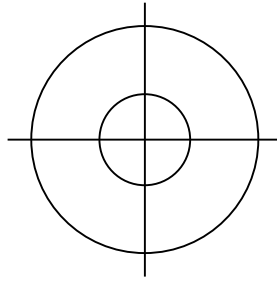


Рис. 3. Особлива точка центра —
концентричні лінії (кола, еліпси)

Характер особливих точок лінеаризованої та вихідної нелінійної системи співпадає за виключенням випадків:

а) якщо особлива точка лінеаризованої системи є центр (рис. 3), тобто виконується $SpM = 0$ і $\det M > 0$, — корені чисто уявні, то особлива точка ММ (1) або центр, або фокус;

б) якщо хоча б один корінь лінеаризованої системи рівний нулю, то для аналізу особливої точки ММ (1) вимагається додаткове дослідження.

Насамкінець, витлумачимо ще два важливі поняття, що фігурують останнім часом у літературі з математичного моделювання економічної динаміки:

а) біфуркація — розгалуження процесу: в одній з точок простору подій у деякий момент часу нелінійна економічна система в динаміці набуває вдвічі більше можливих шляхів розвитку. По-іншому, зміна характеру руху динамічної системи на значному часовому інтервалі при змінюваності одного чи кількох параметрів;

б) груба система є така, котра після збурення повертається до свого попереднього стану (структура і розв'язок стійкі).

Таким чином, розкрито зміст категорій та вказано техніку якісного дослідження на прикладі ММ (1). Економічна інтерпретація [1] результатів якісного моделювання приймається до уваги в подальшому.

Основний результат статті. ММ (1) записана при використанні умов обміну товарами (за наявності певних гіпотез). Але в такому процесі завжди настає стан насиченості: в якийсь момент часу обмін зароджується, а далі на певних проміжках часу він нарощується і обов'язково настає такий етап розвитку, коли кількісні обмінні характеристики стабілізуються, тобто з плином часу вони приймають ті ж самі числові значення (відбувається наповнення то-

варами обміну). В економіці таке явище завжди має місце і є визначальним, оцінюється як закономірне. Воно превалює, досить пригадати появу логістичної моделі, як удосконалення рівняння типу Мальтуса (для короткого проміжку часу спостерігається експоненційний характер економічного розвитку — результат класичної лінійної парадигми економіки). Але сучасна теоретична, як і прикладна, економіка стоїть на синергетичних позиціях — перш за все відкритості, нестаціонарності, нелінійності та динаміки економічної системи. На жаль, у відомій літературі [1, 4, 6] із математичного моделювання економіки не відображено стан насиченості.

Врахування стану насиченого обміну товарами цілком природне і логічне ще тому, що попередній [1] результат передбачав використання умов $\tau_x \rightarrow \infty$ — безмежної корисності товару (його асимптотичної поведінки на ринку).

Для написання рівнянь динаміки стану насичення обмінного процесу використовуються відомі в синергетиці та фізичній і хімічній кінетиці положення, а саме:

1) спосіб головних пропорцій у синергетиці [7] стверджує, що швидкість змінюваності і величини, вибраної в якості змінної економічного стану, пропорційна приросту зазначеного чинника мінус його витрати;

2) головний принцип кінетики — щоб взаємодіяти, треба зустрітися. Як правило, зустріч носить білінійний характер.

Найпростіше насичений стан процесу обміну товарами відображається ММ вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = j_1 - j_2xy/(1 + Ax) - j_3x \\ \dot{y}(t) = j_4 - j_5xy - j_6y \end{cases}, \quad (2)$$

де саме другий доданок першого рівняння системи (2), будучи кінетичним (також член j_5xy другого рівняння), відображає стан наповнення товаром виду x , при чому A є стала величина.

Праві частини диференціальних рівнянь ММ (2) записані з використанням способу головних пропорцій.

По своїй суті отриманий результат відноситься до економічної кінетики, яка по аналогії визначається як вчення про стан нерівноважної економіки, процеси і закони його протікання в часі, швидкості і механізми.

Обмінна вартість в нашому випадку записується

$$C = \frac{(j_1 - j_3\bar{x})(1 + A\bar{x})}{j_4 - j_6\bar{y}}, \quad (3)$$

бо при $\dot{x}(t) = 0$ виконується $j_2xy = (j_1 - j_3\bar{x})(1 + A\bar{x})$, а для $\dot{y}(t) = 0$ — $j_5xy = j_4 - j_6\bar{y}$. Формула (3) виражає обмінну вартість через запаси товарів виду x і y , коли одного товару більше іншого.

Якщо покласти $j_3 = 0$, тобто товар x довговічний — $-\tau_x \rightarrow \infty$ ($\tau_x = 1/j_3$) або по-іншому з'являються гроші, то формула (3) приймає вигляд:

$$C_0 = \frac{j_1(1 + A\bar{x})}{j_4 - \frac{\bar{y}}{\tau_y}}, \quad (4)$$

де $\tau_y = \frac{1}{j_6}$ свідчить про довговічність товару y . При $A = 0$, зрозуміло, отримується результат [1], який узагальнює формулу рівноважної концепції ціни Ерроу—Дебре—Мак-Кензі. Дійсно, формула (4) відображає нерівноважну ціну.

Для умови $\tau_x \rightarrow \infty$ ММ (2) переписується

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = j_1 - C_0xy \\ \dot{y}(t) = j_4 - xy - \frac{y}{\tau_y} \end{cases}, \quad (5)$$

для якої точки рівноваги записуються: $\bar{x} = \frac{j_1}{(C_0\bar{y})}$;

$\bar{y} = \tau_y \left(j_4 - \frac{j_1}{C_0} \right)$. В розглядуваному варіанті слід матриці Якобі

має вигляд $SpM = -C_0\bar{y} - \bar{x} - \frac{1}{\tau_y}$; її визначник є $\det M = C_0j_4 - j_1$.

Отже, залежно від знаку виразу $\left(j_4 - \frac{j_1}{C_0} \right)$ матиме місце особлива точка фокус для $C_0j_4 > j_1$ і сідло для нерівності — навпаки. Таким чином, при здійсненні граничного переходу $\tau_x \rightarrow \infty$ в моделі (2) відбувається біфуркація — злиття сідла і фокуса з наступним утворенням чогось одного для ММ (3).

Слушно зауважити наступне. Без врахування стану насиченості ($A = 0$) при $\bar{y} = 0$ також $\det M = 0$ і концепція рівноважної ціни є негруба [1], що означає недосяжність точки рівноваги. Тепер

же, не відкидаючи факт насиченості обмінного процесу, не так, бо з формули (4) випливає $C_0 = \frac{j_1}{j_4}(1 + A\bar{x})$ і $\det M = j_1 A\bar{x} \neq 0$.

За наявності в суспільстві дефіциту (платоспроможний попит перевищує пропозицію, про що свідчить нерівність $\left(\frac{j_1}{C_0}\right) > j_4$) обмінна вартість або ціна рівна

$$C_0 = \frac{j_1(1 + A\bar{x})}{j_4 + |\bar{y}|/\tau_y}, \quad (6)$$

де $|\bar{y}|$ називається абсолютним дефіцитом товару виду y . Звідси після елементарних алгебраїчних перетворень випливає

$$|\bar{y}| = \tau_y \left[\frac{j_1}{C_0}(1 + A\bar{x}) - j_4 \right]. \quad (7)$$

обсягу абсолютного дефіциту. Отже, окрім загальновизнаних причин дефіциту (нестача товару, низькі ціни) на його обсяг суттєво (прямопропорційно) впливає висока платоспроможність членів суспільства (наявність на руках значної грошової маси).

В суспільстві з жорстким дефіцитом інколи вдаються до безплатного (лімітованого) розподілу благ, що рівносильно умові $C_0 \rightarrow 0$. При цьому завжди матиме місце особлива точка сідло (оскільки $SpM < 0$ і $\det M < 0$) і економічна система нестійка. З формули (6) випливає, що зазначений вище крок протиприродний, а вираз (7) свідчить про обов'язково ще більшу дефіцитність.

Висновки. Наукові результати праці складає наступне. Запропоновано ММ насиченого процесу обміну товарами, яка описує появу і роль грошей у суспільстві. На підґрунті якісного аналізу ММ встановлено: а) формулу (7) обсягу абсолютного дефіциту; б) прямопропорційний вплив високої платоспроможності членів суспільства на розміри дефіциту, чим його традиційні причини (нестача товару і низькі ціни) доповнюються; в) адміністративний розподіл благ суспільства завжди сприяє нестійкості економічної системи і, більш того, обов'язковому існуванню дефіциту.

Формула (3) нерівноважної ціни як окремий випадок включає в себе відому в економічній літературі концепцію рівноважної ціни.

Література

1. *Милованов В.П.* Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и самоорганизация. — М.: Едиториал, УРСС, 2001. — 264 с.
2. Моделирование экономической динамики: Учеб. пособие / Клебанова Т. С. и др. — Х.: Издат. дом «ИНЖЭК», 2004. — 244 с.
3. *Норенков И. П.* Введение в автоматизированное проектирование технических устройств и систем. — М.: Высш. шк., 1986. — 304 с.
4. *Милованов В.П.* Синергетика и самоорганизация: Экономика. Биофизика. — М.: Ком Книга, 2005. — 168 с.
5. *Баутин Н. Н. Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1976. — 496 с.
6. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. — М.: Мир, 1999. — 336 с.
7. *Хакен Г.* Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. — М.: Мир, 1985.

Стаття надійшла до редакції 8.12.08 р.

УДК 330.322 (353.5)

В. Г. Кравченко, А. А. Овчаренко

ДВНЗ «Київський національний економічний
університет імені Вадима Гетьмана»

МОДЕЛЬ УПРАВЛІННЯ РИЗИКАМИ ІНВЕСТИЦІЙНОЇ СТРАТЕГІЇ КОНКУРЕНТО- СПРОМОЖНОГО РОЗВИТКУ РЕГІОНУ

АНОТАЦІЯ. Розглянуті питання моделювання процесу управління ризиками при формуванні наближеної до оптимальної стратегії конкурентоспроможного розвитку регіону. На основі дослідження чинників, які впливають на ефективність та конкурентоздатність реалізації стратегії розвитку, побудована модель управління ризиками стратегії конкурентоспроможного соціально-економічного розвитку регіону.

ANNOTATION. There are considered the questions of modeling risks management process of forming the optimum strategy of competitive region development. On the basis of research of factors, influence on efficiency and competitiveness of realization of strategy of development, a case of strategy of competitive socio-economic development of region risks frame is built.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. Стратегія розвитку регіону, інвестиційний клімат, ризик, сценарій розвитку, управління ризиками, конкурентоздатна стратегія розвитку.